UNE RELATION ENTRE LA DÉRIVABILITÉ A DROITE ET LA CONTINUITÉ

UNE RELATION ENTRE LA DÉRIVABILITÉ A DROITE ET LA CONTINUITÉ

par E. Busko

Le théorème qui va être énoncé permet de résoudre le problème suivant: appelons « primitive à droite » d'une fonction f définie sur un intervalle $I \subset \mathfrak{R}$ à valeurs dans un espace vectoriel topologique E, toute fonction F possédant une dérivée à droite F'_d égale à f (sur I); peut-on trouver simplement toutes les « primitives à droite » connaissant l'une d'elles?

La réponse est affirmative lorsque la topologie de E a de fortes propriétés: étant données deux « primitives à droite » F et G de f, il existe une suite d'intervalles ouverts dont la réunion est dense dans I et sur chacun desquels F et G diffèrent d'une constante.

Il peut se faire qu'aucune « primitive à droite » ne soit continue dans I. Exemple: $I = \mathfrak{R}$, $F(x) = \sin 1/x$ pour $x < 0$ et $F(x) = 0$ pour $x \geqslant 0$; toute « primitive à droite » de $f(x) = F'_d(x)$, continue sur $]-\infty, 0[$ diffère de F, sur cet intervalle, d'une constante, donc n'a pas de limite à gauche au point $x = 0$.

Cependant on a le

Théorème. — *Si la fonction f définie sur l'intervalle $I = [a, b[\subset \mathfrak{R}$, à valeurs dans un espace vectoriel normé E sur $\mathfrak{R}$, possède une dérivée à droite $f'_d(x)$ pour tout $x \in I$, il existe une suite d'intervalles (I_n) (non réduits à un point), fermés à gauche, dont la réunion est dense dans I et sur chacun desquels f est continue.*

En particulier, si $f'_d(x) = 0$ pour tout $x \in I$, f est constante sur chaque I_n.

Démonstration. 1°) On va démontrer tout d'abord qu'il existe un intervalle ouvert $\subset I$ sur lequel f est continue. Par l'absurde, supposons en effet que f ne soit continue dans aucun sous-intervalle ouvert $\subset I$. Il existe donc un ensemble D dense dans I, en tout point duquel f n'est pas continue. L'hypothèse entraînant la continuité à droite sur I, f n'est pas continue à gauche pour $x \in D$.

Donc, pour tout $x \in D$, il existe $h > 0$ tel que pour tout $d > 0$, l'intervalle $]x-h/d, x[$ contienne un point $y \in I$ pour lequel $||f(x) - f(y)|| > h$, de sorte que $||(f(x)-f(y))/(x-y)|| > d$. La fonction $t \to (f(x)-f(t))/(x-t)$, définie dans I pour $t \neq x$, étant continue à droite au point y, il existe z vérifiant $y < z < x$ tel que pour $y \leqslant t \leqslant z$, on ait $||(f(x)-f(t))/(x-t)|| > d$. Ceci étant, soit $(d_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres réels > 0 tendant vers $+\infty$. Fixons $x_0 \in D$; il existe $y_0 \in I$ et $x_1 \in D$ tels que $y_0 < x_1 < x_0$ et que, pour $y_0 \leqslant t \leqslant x_1$, on ait $||(f(x_0)-f(t))/(x_0-t)|| > d_0$. Puis, partant de $x_1 \in D$, on trouve y_1 et $x_2 \in D$ avec $y_0 < y_1 < x_2 < x_1$ tels que pour $y_1 \leqslant t \leqslant x_2$ on ait $||(f(x_1)-f(t))/(x_1-t)|| > d_1$, etc. On trouve ainsi par récurrence deux suites $(x_n)_{n \geq 0}$ dans D et $(y_n)_{n \geq 0}$ dans I telles que pour chaque entier $n \geqslant 0$ on ait les inégalités $y_n < y_{n+1} < x_{n+1} < x_n$ et l'implication

$$(y_n \leqslant t \leqslant x_{n+1}) \Rightarrow ||(f(x_n)-f(t)) / (x_n-t)|| > d_n .$$

Soit $\xi \in I$ la limite de la suite décroissante (x_n). Pour tout $n \geqslant 0$ on a $y_n < \xi < x_{n+1}$, donc $||(f(x_n)-f(\xi)) / (x_n-\xi)|| > d_n$, de sorte que $\lim_{n \to \infty} ||(f(x_n) - f(\xi)) / (x_n-\xi)|| = +\infty$, ce qui contredit l'hypothèse $f'_d(\xi) \in E$.

2°) Soit maintenant ρ la relation définie sur les couples (x, y) de I par: $x \rho y \Leftrightarrow f$ est continue sur l'intervalle fermé d'extrémités x et y.

On a une relation d'équivalence. Chaque classe d'équivalence est un intervalle, par définition de ρ, et cet intervalle est fermé à gauche à cause de la continuité à droite. Enfin, la réunion des classes d'équivalence non réduites à un point est dense dans I, en vertu du 1°), et cette réunion est dénombrable, car toute famille d'intervalles de $\mathfrak{R}$, d'intérieur non vide, disjoints deux à deux, est dénombrable.

La deuxième partie du théorème résulte du théorème des accroissements finis (cf. [1], théorème 2 page 22). C.q.f.d.

Remarque. — Ce théorème met en défaut la conclusion de [1], exercice 2 page 27.

La question se pose de savoir si on peut généraliser ce résultat à des espaces localement convexes E (séparés) plus généraux. Il n'en est rien.

En effet, deux cas se présentent: ou bien E admet un voisinage borné, alors sa topologie d'espace localement convexe séparé peut être définie par une norme (cf. [2], ex. 2 p. 11); ou bien E n'admet aucun voisinage borné.

Mais voici un exemple de ce deuxième cas.

Exemple. — Soit $E = \mathfrak{R}^{\mathfrak{N}}$, l'ensemble des suites réelles muni de la topologie produit qui en fait un espace localement convexe séparé; cette topologie est d'ailleurs métrisable (et complète) par la distance

$$d(x, y) = \sum_{n=o}^{\infty} \epsilon_n \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|},$$

où (ϵ_n) est une suite de nombres > 0 telle que $\sum_{n=o}^{\infty} \epsilon_n < +\infty$ (cf. [3]).

Soit $I = [0, 1[$ et supposons les rationnels de $]0, 1[$ rangés en une suite $(r_n)_{n \geq 0}$. Définissons $f : I \to E$ par chacune de ses coordonnées f_n:

$$f_n(t) = 0 \quad \text{si} \quad 0 \leqslant t < r_n,$$
$$f_n(t) = 1 \quad \text{si} \quad r_n \leqslant t < 1.$$

Alors f admet une dérivée à droite nulle sur I. En effet, chacune des coordonnées f_n admet une dérivée à droite nulle pour tout $x \in I$. Mais f_n n'est pas continue à gauche au point $x = r_n$, donc f non plus: de sorte que f n'est ni continue ni constante dans aucun sous-intervalle de I.

Revenons au problème posé, dans le cas où E est normé: il suffit de trouver toutes les fonctions possédant une dérivée à droite nulle sur I en vertu de l'équivalence

$$f'_d = g'_d \text{ sur } I \Leftrightarrow (f-g)'_d = 0 \text{ sur } I.$$

Voici d'abord un exemple dans la proposition qui suit:

PROPOSITION. — *Pour toute suite (I_n) d'intervalles $\subset I = [a, b[$, disjoints deux à deux, telle que tout intervalle rencontrant deux intervalles distincts I_p et I_q contienne l'extrémité (droite) d'un intervalle I_n ouvert à droite, il existe une fonction $f : \mathfrak{R} \to E$*

a) *constante sur chaque I_n;*

b) *non constante sur la réunion de deux quelconques des I_n;*

c) *de dérivée à droite nulle en tout point;*

d) *telle que l'application $x \to ||f(x)||$ soit croissante.*

Démonstration. — Il suffit de trouver une fonction g numérique $\geqslant 0$ croissante vérifiant a), b) et c), car pour tout $\alpha \in E$, $\alpha \neq 0$, la fonction $x \to f(x) = \alpha\, g(x)$ vérifie a), b), c) et d).

Soit $(J_n)_{n \in M}$, $M \subset \mathfrak{N}$, l'ensemble dénombrable des intervalles I_n ouverts à droite. On désigne par a_n l'origine de J_n et b_n son extrémité et on pose, pour $n \in M$,

$$g_n(x) = 0 \qquad \text{lorsque} \qquad x < b_n\,,$$
$$g_n(x) = (b_n - a_n)^2 \qquad \text{lorsque} \qquad x \geqslant b_n\,.$$

Pour tout $x \in \mathfrak{R}$, la série $\sum\limits_{n \in M} g_n(x) = \sum\limits_{\substack{n \in M:\\ b_n \leq x}} (b_n - a_n)^2$ est convergente, car

$$\sum_{\substack{n \in M:\\ b_n \leq x}} (b_n - a_n)^2 \leqslant (b-a) \sum_{\substack{n \in M:\\ b_n \leq x}} (b_n - a_n) \leqslant (b-a)^2\,.$$

Si $x < y$, on a $g_n(x) \leqslant g_n(y)$ pour chaque $n \in M$, donc $g(x) \leqslant g(y)$; en outre s'il existe $n \in M$ tel que $g_n(x) < g_n(y)$, alors $g(x) < g(y)$. Donc g est $\geqslant 0$, croissante, vérifie a) et b) car l'enveloppe convexe de $I_p \cup I_q$ contient un point b_n : g_n prend sur I_p et I_q deux valeurs distinctes, donc g aussi. Reste à vérifier c). Par construction, g est constante sur tout intervalle $[a_n, b_n[$, donc $g'_d(x) = 0$ pour $x \in J = \bigcup\limits_{n \in M} [a_n, b_n[$. Soit $x \notin J$. S'il existe $h > 0$ tel que $[x, x+h]$ ne rencontre pas J, g est encore constante sur $[x, x+h]$, par construction, donc $g'_d(x) = 0$; sinon, pour $y > x$, on a

$$g(y) - g(x) = \sum_{\substack{n \in M:\\ x < a_n < b_n \leq y}} (b_n - a_n)^2 \leqslant (y-x) \sum_{\substack{n \in M:\\ x < a_n < b_n \leq y}} (b_n - a_n) \leqslant (y-x)^2\,,$$

c'est dire que $g'_d(x) = 0$. C.q.f.d.

Passant au cas général, soit une suite (I_n) d'intervalles $\subset I$, d'origine a_n, d'intérieur non vide, fermés à gauche, disjoints deux à deux, dont la réunion est dense dans I. Pour qu'une fonction constante sur chaque I_n ait une dérivée à droite nulle sur I il faut et il suffit qu'elle vérifie la condition: pour toute suite décroissante de points a_{n_k} tendant vers un point x, on a $\lim\limits_{k \to \infty} (f(a_{n_k}) - f(x)) / (a_{n_k} - x) = 0$. Ceci définit toutes les fonctions possédant une dérivée à droite nulle et achève de résoudre le problème proposé.

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. Bourbaki, Fonctions d'une variable réelle, chap. 1, 2, 3 (1958).
[2] N. Bourbaki, Espaces vectoriels topologiques, chap. 3, 4, 5 (1964).
[3] S. Banach, Théorie des opérations linéaires, Warszawa (1932).

(Reçu le 25 novembre 1965)

E. Busko
Résidence Gambetta A.1
91, Yerres (France)

vide-leer-empty