§ 2. La transformation variationnelle proposée

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **11 (1965)**

Heft 2-3: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.09.2024**

$$\Psi(\vec{x}, \vec{p}, \operatorname{div} \vec{p}) = \vec{q} \cdot \vec{p} + v \operatorname{div} \vec{p} - F = \frac{1}{2} \vec{p}^{\,2} \;;$$

d'où le principe dual:

$$(5) \qquad d = \operatorname{Max}_{\operatorname{div} \vec{p} = -\rho} \left\{ \oint_{\Gamma} \chi(s) \vec{p} \cdot \vec{n} \, ds - \frac{1}{2} \iint_{G} \vec{p}^{\,2} \, dA \right\},$$

qui n'est autre que le principe de Thomson (cf. [13]); le champ extrémal est $\vec{p} = \operatorname{grad} u$. Les champs vectoriels $\vec{p}$ concurrents satisfont l'équation différentielle, mais aucune condition aux limites.

1.4. Nous considérerons au § 2 une transformation variationnelle analogue (mais non involutive), reposant non plus sur une dissociation de v et grad v, mais bien sur une dissociation de la fonction v elle-même en *deux* fonctions f et g (le domaine G étant à *deux* dimensions). Au § 3, nous appliquerons cette transformation au problème considéré en 1.3 ci-dessus: elle fait correspondre au principe de Dirichlet un principe très voisin de celui de Thomson, mais restreignant les champs concurrents par des conditions aux limites; ce principe a été obtenu par la « méthode des problèmes auxiliaires unidimensionnels » [8, 7]. Au § 4, nous montrerons comment cette méthode s'applique également aux problèmes aux valeurs propres, et conduit, à partir du principe de Rayleigh, à un principe de Maximum pour λ_1 (la première valeur propre) déjà obtenu à l'aide de problèmes auxiliaires unidimensionnels [6, 7], inspirés par Payne-Weinberger [11]. Enfin, nous montrerons au § 5 qu'une forme essentiellement équivalente de ce principe de Maximum (mais plus proche du principe de Thomson), se rattachant à divers travaux dont quelques-uns déjà anciens [12, 1, 14, 15, 10, 7, 9, 4], peut être également obtenue en appliquant une transformation de Friedrichs à peine modifiée.

§ 2. La transformation variationnelle proposée

2.1. Nous partons de nouveau du problème (I) considéré en 1.2:

$$(\mathrm{I}) \quad \begin{cases} d = \operatorname{Min}_v J[v] \text{ sous la condition } v = \chi(s) \text{ sur } \Gamma\,, \\ \text{où } J[v] = \iint_G F(x, y, v, v_x, v_y)\, dA\,. \textit{ Nous supposons } F_{v_x v_y} = 0. \end{cases}$$

Dans cette expression, nous remplaçons v_x par f_x, v_y par g_y, et *arbitrairement* $v(x, y)$ tantôt par $f(x, y)$, tantôt par $g(x, y)$; nous obtenons une fonction $\tilde{F}(x, y, f, g, f_x, g_y)$ telle que

$$(6) \qquad \tilde{F}(x, y, v, v, v_x, v_y) \equiv F(x, y, v, v_x, v_y);$$

$f(x, y)$ est supposée continue *en* x, ainsi que sa dérivée partielle f_x; $g(x, y)$ continue *en* y, ainsi que g_y; on suppose l'existence de f_{xx} et g_{yy}.

Remarque, importante pour les applications: On n'exigera *pas* que les fonctions f et g soient continues !

Posons

$$\tilde{J}[f, g] = \iint_G \tilde{F}(x, y, f, g, f_x, g_y)\, dA;$$

$\tilde{J}[v, v] = J[v]$, nous avons donc:

$$d = \mathrm{Min}_{f,g}\, \tilde{J}[f, g]$$

sous les conditions $f \equiv g$ dans G et $f = g = \chi(s)$ sur Γ.

2.2. Introduisons un « multiplicateur de Lagrange » $\lambda(x, y)$; je définis

$$(7) \qquad d[\lambda] = \mathrm{Min}_{\begin{cases} f,\, g \\ f = g = \chi(s) \text{ sur } \Gamma \end{cases}} \tilde{J}[f, g; \lambda],$$

$$\text{où } \tilde{J}[f, g; \lambda] = \tilde{J}[f, g] + \iint_G \lambda \cdot (f - g)\, dA$$

(donc $\tilde{J}[f, g; 0] = \tilde{J}[f, g]$), et je fais les deux *hypothèses* suivantes:

(a) Ce Minimum variationnel existe pour toutes les fonctions $\lambda(x, y)$ de la classe considérée;

(b) La paire de fonctions $\{f, g\}$ (dépendant de λ) qui réalise ce Minimum, est univoquement déterminée par les conditions d'Euler

$$(8) \qquad \begin{cases} 0 = [\tilde{F} + \lambda(f - g)]_f = [\tilde{F}]_f + \lambda(x, y) = \tilde{F}_f - \dfrac{d}{dx} \tilde{F}_{f_x} + \lambda \\ \\ 0 = [\tilde{F} + \lambda(f - g)]_g = [\tilde{F}]_g - \lambda(x, y) = \tilde{F}_g - \dfrac{d}{dy} \tilde{F}_{g_y} - \lambda \end{cases}$$

et la condition imposée $f = g = \chi(s)$ sur Γ.

Quelle que soit $\lambda(x, y)$ (dans la classe considérée), on a

(9)
$$d[\lambda] \leqq d,$$

car

$$d = \operatorname{Min}_{\left\{\begin{smallmatrix} f,\, g \\ f = g = \chi(s) \text{ sur } \Gamma \end{smallmatrix}\right.} \tilde{J}[f, g; \lambda]$$

sous la condition supplémentaire f $\equiv$ g.

2.3. La solution $u(x, y)$ du problème de variation initial (I) satisfait l'équation d'Euler correspondante

$$0 = [F]_u = F_u - \frac{d}{dx} F_{u_x} - \frac{d}{dy} F_{u_y};$$

la paire de fonctions $\{f, g\} = \{u, u\}$ satisfait donc

$$0 = [\tilde{F}]_f + [\tilde{F}]_g;$$

si donc, dans le problème de variation (7) définissant $d[\lambda]$, nous posons

$$\lambda(x, y) = -[\tilde{F}]_f\big|_{f \equiv u},$$

alors la paire de fonctions $\{u, u\}$ satisfait les deux équations d'Euler (8); par l'unicité que nous avons postulée, elle réalise donc le Minimum

$$d[\lambda = -[\tilde{F}]_f\big|_{f \equiv u}];$$

celui-ci vaut donc $J[u] = d$. *Sous les hypothèses* (a) *et* (b) ci-dessus, nous avons donc par (9):

(10)
$$d = \operatorname{Max}_{\lambda(x, y)} d[\lambda(x, y)].$$

Le raisonnement qui précède est calqué sur celui de Friedrichs, cf. [5] et [2].

2.4. Au lieu de choisir le « multiplicateur de Lagrange » $\lambda(x, y)$, on peut également choisir une paire de fonctions $\{f(x, y), g(x, y)\}$ *satisfaisant la condition*

(11)
$$[\tilde{F}]_f + [\tilde{F}]_g \equiv \tilde{F}_f + \tilde{F}_g - \frac{d}{dx} \tilde{F}_{f_x} - \frac{d}{dy} \tilde{F}_{g_y} = 0;$$

on doit alors prendre $\lambda(x, y) = -[\tilde{F}]_f = +[\tilde{F}]_g$.

Pour toute paire $\{f(x, y), g(x, y)\}$ satisfaisant (11), on a

$$d[-[\tilde{F}]_f] = \tilde{J}[f, g; -[\tilde{F}]_f] = \tilde{J}[f, g] - \iint_G ([\tilde{F}]_f f + [\tilde{F}]_g g)\, dA ,$$

d'où par (10):

$$d = \mathrm{Max}_{f,g}\{\tilde{J}[f, g] - \iint_G ([\tilde{F}]_f f + [\tilde{F}]_g g)\, dA\} \tag{12}$$

sous les conditions (11) et

$$\left\{\begin{array}{l} f(x, y) \text{ continue } en\ x,\ \text{ainsi que } f_x\ ;\ f_{xx} \text{ existe;} \\ g(x, y) \text{ continue } en\ y,\ \text{ainsi que } g_y\ ;\ g_{yy} \text{ existe;} \\ f = g = \chi(s) \text{ sur } \Gamma. \end{array}\right. \tag{13}$$

2.5. *Remarque.* — Il nous reste une liberté: la manière (arbitraire) dont nous remplaçons φ par f ou par g dans F, sous la condition (6). Même si φ n'apparaît pas explicitement dans F, nous sommes libres d'ajouter, dans $\tilde{F}$, des expressions s'annulant lorsque $f \equiv g$. En particulier, si nous remplaçons $\tilde{F}$ par $\tilde{F} + v\,.\,(f - g)$ avec $v(x, y)$ arbitraire, $\tilde{J}[f, g]$ devient $\tilde{J}[f, g] + \iint_G v\,.\,(f - g)\, dA = \tilde{J}[f, g; v]$. Cela nous montre que, si nous réservons notre liberté dans la construction de $\tilde{F}$, le choix $\lambda(x, y) \equiv 0$ ne signifie pas une restriction. La condition (11) devient alors

$$[\tilde{F}]_f = [\tilde{F}]_g = 0\,; \tag{11*}$$

donc

$$d = \mathrm{Max}_{\left\{\begin{array}{l}\text{construction de } \tilde{F} \text{ satisfaisant (6)} \\ \text{choix de } f \text{ et } g \text{ satisfaisant (11*) et (13)}\end{array}\right.} \tilde{J}[f, g]\,. \tag{12*}$$

§ 3. Application aux problèmes aux limites

Reprenons le problème considéré en 1.3. Le principe variationnel (I) est celui de Dirichlet (4): $F(x, y, \varphi, \varphi_x, \varphi_y) = \frac{1}{2}(\varphi_x^2 + \varphi_y^2) - \rho v$; je pose *(par exemple !)* $\tilde{F}(x, y, f, g, f_x, g_y) = \frac{1}{2}(f_x^2 + g_y^2) - \rho f$; la condition (6) est satisfaite; la condition (11) est ici:

$$f_{xx} + g_{yy} = -\rho(x, y)\,. \tag{11'}$$