Or, on a manifestement $r_1 r_2 \geqq r_3^2$ et $4r_1 > r_1 - r_2$, et le produit de ces deux inégalités positives donne $4r_1^2 r_2 > r_3^2 (r_1 - r_2)$. Puisqu'on a encore $r_1 \geqq r_2$, aucun des termes du côté gauche de (9) n'est négatif, ce qui démontre cette inégalité.

Nous avons donc

$$M_0(r) \leqq M_0(m) \quad \text{et} \quad M_1(r) \geqq M_1(m),$$

$$r_3 \leqq m_1 \quad \text{et} \quad r_1 \geqq m_3;$$

c'est dire qu'il existe un t [1]), $0 < t < 1$, tel que $(m^t) \prec (r^t)$.

L'inégalité (7) se trouve ainsi démontrée, et il est facile de voir qu'il n'y a égalité que dans le cas d'un triangle équilatéral.

Pour conclure, remarquons qu'il ne peut exister d'inégalité générale entre $\frac{\sqrt{3}}{2} M_u(a)$ et $M_u(m)$; ceci est une conséquence immédiate d'un théorème d'Euler [6] qui affirme qu'on peut construire avec les médianes m_i du triangle $A_1 A_2 A_3$ un nouveau triangle dont les médianes sont alors $\frac{3}{4} a_i$. Par contre, on sait qu'il existe certaines égalités; on voit aisément avec (8) qu'on a toujours

$$\frac{\sqrt{3}}{2} M_2(a) = M_2(m) \quad \text{et} \quad \frac{\sqrt{3}}{2} M_4(a) = M_4(m).$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Makowski, « Inequalities for a Triangle », *El. Math.* 16 (1961), 60-61.

[2] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Pólya. « Inequalities », *Cambridge University Press* (second edition, 1959), aux pages 45 et 89.

[3] J. Karamata, « Sur une inégalité relative aux fonctions convexes », *Publ. math. Univ. Belgrade*, 1 (1932), 145-148.

[4] M. Petrović, « Sur quelques fonctions des côtés et des angles d'un triangle », *Enseignement math.* 18 (1916), 153-163.

[5] F. Leuenberger, « Gegensätzliches Verhalten der arithmetischen und geometrischen Mittel », *El. Math.* 16 (1961), 127-129.

[6] Leonhardi Euleri, Opera Omnia, Series I, Vol. 4 (Commentationes Arithmeticae **3**), aux pages XXI et 298.

(Reçu le 30 juin 1964)

J. Steinig
5, rue Toeffer
Genève

[1]) La valeur exacte de t, comme celle de s, dépendra du choix de a); par exemple, $s > \frac{1}{4}$ lorsque $(a) = (3, 4, 5)$, au lieu que $s < \frac{1}{4}$ si $(a) = (2, 24, 24)$.

vide-leer-empty