

Jahressitzung in Zürich, 10. Oktober 1964

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **11 (1965)**

Heft 2-3: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Mon malaise est d'ailleurs encore plus grand depuis que j'ai vu que certains manuscrits de Steiner reçus par l'École polytechnique portaient la mention: « nicht aufbewahren » et, depuis que je sais que l'on a perdu toute trace du manuscrit sur les maximum après son arrivée à Berlin.

Mesdames et Messieurs, cela m'incite à terminer par un conseil de bibliothécaire: Ne détruisez pas les manuscrits de vos découvertes. D'abord parce qu'ils rendront service au conférencier qui fera votre éloge cent ans après votre mort, mais aussi parce qu'ils constituent pour l'histoire des sciences des documents irremplaçables, pleins d'une valeur émotive non négligeable. On crée des musées de la technique, il est temps de penser à un musée des mathématiques. Je crois qu'il y manquera toujours certains travaux de Steiner, car Steiner est encore plus grand que « tel qu'en lui-même enfin, l'éternité l'a changé ».

Jahressitzung in Zürich, 10. Oktober 1964

Die Jahresversammlung der SMG fand am 10. Oktober 1964 im Rahmen derjenigen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft in Zürich statt. Es wurden 8 wissenschaftliche Vorträge gehalten, die untenstehend entweder durch ihren Titel oder im Auszug angegeben sind.

R. COIFMAN (Genève): *Sur l'itération continue des fonctions réelles.*

Soit $f(x)$ continue, strictement croissante sur $[0, a]$ et telle que $0 < f(x) < x$ pour $x \in [0, a]$. On appelle famille d'itérées de f toute famille $f_\sigma(x)$ de fonctions telle que

$$\forall \sigma, \mu \in \mathfrak{R}, \quad f_1(x) = f(x) \quad \text{et} \quad f_\sigma(f_\mu(x)) = f_{\sigma+\mu}(x).$$

La construction d'une telle famille est liée à la résolution de l'équation fonctionnelle d'Abel:

$$A(f(x)) = A(x) + 1;$$

une famille d'itérées est obtenue en posant

$$f_\sigma(x) = A^{-1}(A(x) + \sigma).$$

L'existence d'une infinité de familles d'itérées d'une fonction donnée nous conduit à exiger certaines conditions de régularité de manière à obtenir l'unicité (voir [1], [2], [3]). Ces conditions de régularité sont données à l'aide de la relation d'équivalence suivante entre familles d'itérées;

Définition : Nous dirons que $f_\sigma(x) \approx g_\sigma(x)$ s'il existe une fonction $\varphi(x)$ telle que

$$f_\sigma(x) = g_{\varphi(x)}(x) \quad \text{et} \quad \varphi(x) \rightarrow \alpha\sigma \quad (x \rightarrow +0) \quad (\alpha \neq 0).$$

Nous dirons qu'une famille d'itérées de $f(x)$ est régulière relativement à $g_\sigma(x)$ lorsque $f_\sigma(x) \approx g_\sigma(x)$.

Théorème : Soit $f_\sigma(x)$ une famille d'itérées continue et strictement monotone en σ , $g(x)$ une fonction continue et strictement croissante pour $x \in [0, a]$ et telle que $0 < g(x) < x$ pour $x \in [0, a]$.
et soit

$$g_0(x) = x, \quad g_{n+1}(x) = g(g_n(x)), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Pour que $g(x)$ possède une famille d'itérées $g_\sigma \approx f_\sigma$, il faut et il suffit que :

$$g_{-n}(f_\sigma(g_n(x))) \rightarrow G(\sigma, x) \quad (n \rightarrow \infty)$$

pour tout σ et $x \in [0, a]$ et que $G(\sigma, x)$ soit continue en σ et x et strictement monotone en σ .

Il existe alors un $\alpha \neq 0$ tel que $g_\sigma(x) = G(\alpha\sigma, x)$ et $g_\sigma(x)$ est la seule famille d'itérées de g équivalente à f_σ .

[1] SZEKERES, G., *Acta Math.*, 100, 1958, p. 203.

[2] ——— *J. Austr. Math. Soc.* (3), 2, 1962, p. 301.

[3] COIFMAN, R., *Comptes Rendus Acad. Sc. Paris*, à paraître.

R. Coifman
Institut de mathématiques
de l'Université de Genève.

J. HERSCH (Zürich): *Equations finies satisfaites par les solutions de certains problèmes aux limites.*

1. Si une *membrane vibrante*, à contour fixé, recouvre un domaine plan symétrique relativement à l'axe des x , chacun sait que sa première fonction propre $u_1(x, y)$ est également symétrique: $u_1(x, -y) = u_1(x, y)$.

Cette propriété se laisse aisément généraliser au cas de plusieurs symétries consécutives. Considérons, par exemple, la membrane en L contenant les trois carrés Q_1 ($0 < x < 1, 0 < y < 1$), Q_2 ($1 < x < 2, 0 < y < 1$) et Q_3 ($0 < x < 1, 1 < y < 2$); à tout point $P_1(x, y) \in Q_1$ nous faisons correspondre ses « symétriques » $P_2(2 - x, y) \in Q_2$ et $P_3(x, 2 - y) \in Q_3$; alors la fonction propre fondamentale u_1 satisfait

$$u_1(P_1) = u_1(P_2) + u_1(P_3).$$

En effet, la fonction $\tilde{u}_1(P_1) \equiv u_1(P_1) - u_1(P_2) - u_1(P_3)$ satisfait $\Delta\tilde{u}_1 + \lambda_1\tilde{u}_1 = 0$ dans Q_1 et $\tilde{u}_1 = 0$ sur le contour de Q_1 ; comme λ_1 n'est pas valeur propre de Q_1 , $\tilde{u}_1 \equiv 0$ dans Q_1 . La même propriété est valable pour toute fonction propre u_n telle que $\Delta u_n + \lambda_n u_n = 0$ avec un λ_n qui n'est pas valeur propre du carré Q_1 . Si la membrane considérée est à contour libre, on doit construire

$$\hat{u}(P_1) \equiv u(P_1) + u(P_2) + u(P_3).$$

2. Le même raisonnement s'applique aux problèmes de Dirichlet et de Neumann pour l'équation de Poisson. Par exemple, dans le domaine en L considéré ci-dessus, soit $\varphi(x, y)$ la solution du problème: $\Delta\varphi = -\rho(x, y)$ à l'intérieur et $\varphi = f(s)$ sur le contour; alors

$$\tilde{\varphi}(P_1) \equiv \varphi(P_1) - \varphi(P_2) - \varphi(P_3)$$

satisfait

$$\Delta\tilde{\varphi}(P_1) = -[\rho(P_1) - \rho(P_2) - \rho(P_3)]$$

dans Q_1 et $\tilde{\varphi} = \tilde{f}(s)$ (immédiatement connue) sur le contour de Q_1 . La résolution de ce problème dans Q_1 fournit une équation finie pour φ .

Si, dans le même domaine, on considère un problème de Neumann: $\Delta u = -\rho(x, y)$, et $\partial u/\partial n = g(s)$ sur le contour, alors

$$\hat{u}(P_1) \equiv u(P_1) + u(P_2) + u(P_3)$$

satisfait

$$\Delta\hat{u}(P_1) = -[\rho(P_1) + \rho(P_2) + \rho(P_3)]$$

dans Q_1 et $\partial\hat{u}/\partial n = \hat{g}(s)$ sur le contour de Q_1 .

Les deux propriétés ci-dessus entraînent la suivante, évidente directement: Soit $\omega(z) = u + i\varphi$ une fonction analytique dans le domaine considéré, alors la fonction

$$\check{\omega}(P_1) = \hat{u} + i\tilde{\varphi} = \omega(P_1) + \bar{\omega}(P_2) + \bar{\omega}(P_3)$$

est analytique dans Q_1 .

3. Les remarques qui précèdent s'appliquent numériquement aux équations aux différences, ainsi qu'aux évaluations reposant sur des principes de variation (Rayleigh, Dirichlet, Thomson): on construira de préférence des fonctions d'essai satisfaisant les mêmes équations finies (comme on le fait toujours dans le cas d'une simple symétrie!).

4. Un exposé plus général de ces propriétés paraîtra (en langue allemande), avec quelques applications, dans le *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. Cependant, ces propriétés ont un caractère si élémentaire qu'elles sont peut-être connues et oubliées depuis des siècles: connaissez-vous un travail qui s'y rapporte?

A. FREI (Zürich): *Freie Gruppen und freie Objekte.*

Die Begriffe und Bezeichnungen dieser Arbeit findet man in den Arbeiten « Group-like structures in general categories I, II, III », von B. Eckmann und P. J. Hilton [1], [2], [3].

Der Begriff der freien Gruppen lässt sich in naheliegender Weise stark verallgemeinern. Seien \mathfrak{C} und \mathfrak{D} zwei Kategorien und $I: \mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{C}$ ein covarianter Funktor. Wir nennen ein Objekt $Y \in \mathfrak{D}$ frei über dem Objekt $X \in \mathfrak{C}$ bezüglich I , wenn es eine Abbildung $\psi: X \rightarrow IY$ in \mathfrak{C} gibt mit der universellen Eigenschaft: zu beliebigem Objekt $Z \in \mathfrak{D}$ und beliebiger Abbildung $X \rightarrow IZ$ in \mathfrak{C} gibt es genau eine Abbildung $\Phi: Y \rightarrow Z$ in \mathfrak{D} mit $I\Phi \cdot \psi = \varphi$

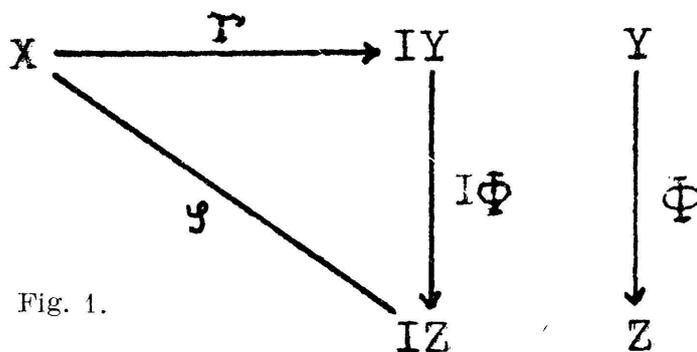


Fig. 1.

Ist \mathfrak{C} die Kategorie der Mengen, \mathfrak{D} diejenige der Gruppen und I der « Vergiss »-Funktor, der jeder Gruppe die zugrundeliegende Menge zuordnet, dann bedeutet diese Definition, dass Y eine freie Gruppe ist und $\psi: X \rightarrow IY$ die Einbettung eines freien Erzeugendensystems. Das Paar (Y, ψ) , bestehend aus dem Objekt Y und der Abbildung $\psi: X \rightarrow IY$, nennen wir das freie Objekt über X .

Freie Objekte haben analoge Eigenschaften wie freie Gruppen; diese werden in der Arbeit, über die wir hier berichten, ausführlich formuliert. So ist z.B. das freie Objekt über einem bestimmten Objekt, falls es existiert, bis auf kanonische Äquivalenz eindeutig bestimmt.

Der Begriff der freien Objekte hängt eng zusammen mit demjenigen der adjungierten Funktoren. Es gilt der

SATZ 1. — Der Funktor I besitze einen linksadjungierten F , mit der adjungierenden Transformation α . Dann hat die natürliche Transformation $\psi_X = \alpha(1_{FX})$ die Eigenschaft, dass für jedes $X \in \mathfrak{C}$ (FX, ψ_X) frei ist über X .

Zu diesem Satz gilt folgende Umkehrung:

SATZ 2. — Seien $I: \mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{C}$ und $F: \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{D}$ covariante Funktoren, und es gebe eine natürliche Transformation $\psi_X: X \rightarrow IFX$, so dass für jedes $X \in \mathfrak{C}$ (FX, ψ_X) frei ist über X . Dann ist F linksadjungiert zu I mit der adjungierenden Transformation α :

$$\alpha: (\Phi) = I\Phi \cdot \psi_X, \quad \Phi \in H(FX, Z).$$

Von nun an sei \mathfrak{D} eine \underline{M} -primitive Kategorie über \mathfrak{C} und $I: \mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{C}$ der « Vergiss »-Funktork: dieser ordnet jedem Objekt (Y, m) aus \mathfrak{D} das Objekt Y aus \mathfrak{C} zu. Ferner nehmen wir an, es existiere ein zu I linksadjungierter Funktor $F: \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{D}$.

Es gilt der

SATZ 3. — Zu jedem Objekt $Y \in \mathfrak{D}$ gibt es einen Epimorphismus $\sigma: FIY \rightarrow Y$ von einem freien Objekt nach Y selbst.

Dieser Satz verallgemeinert den wohlbekanntem Satz aus der Gruppentheorie, wonach jede Gruppe Quotient einer freien ist.

Wenn Y ein Objekt aus \mathfrak{D} ist, wird für jedes $A \in \mathfrak{C}$ durch die \underline{M} -Struktur von Y in $H(A, IY)$ eine \underline{M} -Struktur induziert; wir bezeichnen sie mit $+$. Im folgenden nehmen wir an, \mathfrak{D} sei eine Kategorie mit inversen Produkten, d.h. zu je zwei Objekten aus \mathfrak{D} existiere in \mathfrak{D} ihr inverses Produkt. Dank der induzierten \underline{M} -Struktur lässt sich jedem freien Objekt aus \mathfrak{D} eine \overline{M} -Struktur geben; genauer:

SATZ 4. — Jedes freie Objekt in \mathfrak{D} ist ein \overline{M} -Objekt in \mathfrak{D} , mit der \overline{M} -Struktur μ , die durch $I\mu \cdot \psi = (q_1 + q_2) \cdot \psi$ definiert wird. Diese nennen wir die durch ψ induzierte \overline{M} -Struktur.

Über die induzierte \overline{M} -Struktur lassen sich einige Sätze beweisen, auf die wir hier jedoch nicht eingehen können.

Sei \mathfrak{E} die vollständige \overline{M} -primitive Kategorie über \mathfrak{D} . Die Zuordnung $\tilde{F}: \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{E}$, definiert durch $\tilde{F}X = (FX, \mu)$, wobei μ die durch ψ_x induzierte \overline{M} -Struktur ist, und $\tilde{F}\varphi = F\varphi$, ist ein covarianter Funktor. Andererseits gibt es einen covarianten Funktor $L: \mathfrak{E} \rightarrow \mathfrak{C}$, der folgenderweise definiert ist: (LY, λ_Y) ist Linksegalisator von $I\mu$ und $(q_1 + q_2): IY \rightarrow I(Y * Y)$. Über diese beiden Funktoren gilt der

SATZ 5. — Der Funktor \tilde{F} ist linksadjungiert zu L . Wenn α die adjungierende Transformation von F und I ist, ist die adjungierende Transformation $\eta: H(\tilde{F}X, Y) \rightarrow H(X, LY)$ gegeben durch $\eta^{-1}(\varphi) = \alpha^{-1}(\lambda_Y \cdot \varphi)$, $\varphi \in H(X, LY)$.

Im Falle, wo \mathfrak{C} die Kategorie der punktierten Mengen und \mathfrak{D} diejenige der Gruppen ist, haben Eckmann und Hilton bewiesen, dass die Kategorien \mathfrak{C} und \mathfrak{E} zueinander isomorph sind. In diesem Falle sind die Funktoren \tilde{F} und L zueinander invers und stellen oben genannte Isomorphie her. Dies ist nicht allgemein richtig, wie ein Gegenbeispiel zeigt. Als nächstes wollen wir zeigen, was von diesem Sachverhalt im allgemeinen übrig bleibt.

Allgemein gibt es zu jedem $X \in \mathfrak{C}$ genau eine Abbildung $\psi'_X: X \rightarrow L\tilde{F}X$ für welche das Diagramm

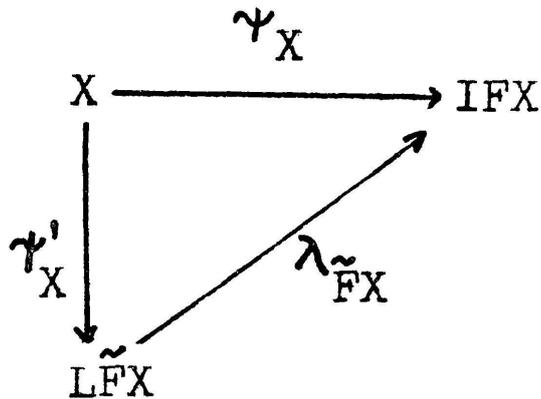


Fig. 2.

kommutiert. Sei \mathfrak{C}' die volle von $L(\mathfrak{E})$ erzeugte Unterkategorie von \mathfrak{C} , und \mathfrak{E}' die volle von $F(\mathfrak{C})$ erzeugte Unterkategorie von \mathfrak{E} ; \tilde{F}' und L' seien die auf \mathfrak{C}' und \mathfrak{E}' beschränkten Funktoren \tilde{F} und L . Es gilt der SATZ 6. — Die Abbildung ψ'_X sei für jedes $X \in \mathfrak{C}$ ein Epimorphismus für Abbildungen nach Objekten aus \mathfrak{D} . Dann sind die Funktoren \tilde{F}' und L' bis auf kanonische Äquivalenz zueinander invers.

Da \tilde{F}' und L' nicht im strengen Sinne zueinander invers sind, kann man nicht von einer Isomorphie im strengen Sinne zwischen \mathfrak{C}' und \mathfrak{D}' sprechen. Die Funktoren \tilde{F}' und L' sind aber, wie man leicht zeigt, beidseitig zueinander adjungiert, und erhalten deshalb Monomorphismen und Epimorphismen, direkte und inverse Produkte sowie direkte und inverse Limites. Ferner bildet $\tilde{F}' H_{\mathfrak{C}'}(X_1, X_2)$ eindeutig auf $H_{\mathfrak{E}'}(\tilde{F}' X_1, \tilde{F}' X_2)$ ab, und L' bildet $H_{\mathfrak{E}'}(Y_1, Y_2)$ eindeutig auf $H_{\mathfrak{C}'}(L' Y_1, L' Y_2)$ ab. Es besteht somit eine gewisse Isomorphie zwischen \mathfrak{C}' und \mathfrak{E}' .

Zum Schluss möchten wir noch daraufhinweisen, dass sich die Begriffe und Sätze, ausser auf das Beispiel, wo \mathfrak{C} die Kategorie der punktierten Mengen und \mathfrak{D} diejenige der Gruppen ist, auf viele weitere Fälle anwenden lassen, von welchen hier nur die folgenden erwähnt seien: \mathfrak{C} punktierte Mengen, \mathfrak{D} abelsche Gruppen. \mathfrak{C} Gruppen, \mathfrak{D} abelsche Gruppen. \mathfrak{C} vollständig reguläre Räume, \mathfrak{D} topologische Gruppen (in diesem Falle sind die freien Objekte die freien topologischen Gruppen).

LITERATUR

- [1] ECKMANN, B. und P. J. HILTON, Group-like structures in general categories I. Multiplications and comultiplications. *Math. Ann.*, 145, 227 (1962).
- [2] ——— Group-like structures in general categories II. Equalizers, Limits, Lengths. *Math. Ann.*, 151, 150 (1963).
- [3] ——— Group-like structures in general categories III. Primitive categories. *Math. Ann.*, 150, 165 (1963).

Sophie PICCARD (Neuchâtel): *Théorie des groupes.*

Il s'agit dans ce travail de différentes structures de groupes abstraits.

La notion de groupe libre se prête à diverses généralisations auxquelles on parvient en considérant des ensembles de générateurs de groupes multiplicatifs liés uniquement par des relations caractéristiques de nature telle que toute relation entre ces générateurs (relation qui découle des relations caractéristiques et des axiomes de groupe) est encore de la même nature.

Soit G un groupe multiplicatif dont 1 est l'élément neutre et soit A un ensemble d'éléments de G . Une composition finie $f(a_1, \dots, a_n)$ d'éléments a_1, \dots, a_n ($n \geq 1$) de A est un produit de la forme

$$f(a_1, \dots, a_n) = a_{i_1}^{j_1} a_{i_2}^{j_2} \dots a_{i_r}^{j_r}$$

où r est un entier ≥ 1 , a_{i_1}, \dots, a_{i_r} sont des éléments pas nécessairement distincts de l'ensemble $\{a_1, \dots, a_n\}$ et j_1, \dots, j_r sont des entiers quelconques.

La *réduction* de f basée uniquement sur les axiomes de groupe consiste, d'une part, à remplacer dans f tout produit $a^l a^m$ par a^{l+m} quel que soit l'élément a de A et quels que soient les entiers m et n et, d'autre part, à laisser tomber tout facteur de la forme a^0 , $a \in A$, si $f \neq a^0$, et de remplacer a^0 par 1, si $f = a^0$; elle conduit à la forme réduite de f qui est soit 1 (élément neutre de G), auquel cas on dit que f est *complètement réductible*, soit 1) $a_{u_1}^{\nu_1} \dots a_{u_s}^{\nu_s}$ où s est un entier tel que $1 \leq s \leq r$, $a_{u_i} \in A$, $i = 1, \dots, s$, $a_{u_i} \neq a_{u_{i+1}}$, $i = 1, 2, \dots, s-1$ et ν_1, \dots, ν_s sont des entiers dont aucun n'est nul.

Soit, à présent, k un entier ≥ 2 donné, fixe, et soit f une composition finie d'éléments de A . La réduction de f modulo k s'opère en s'appuyant sur les axiomes de groupe et en réduisant modulo k l'exposant entier m de tout facteur a^m , $a \in A$; elle conduit à la forme réduite modulo k de f qui est soit 1 soit un produit de la forme 1) où l'entier $\nu_l \not\equiv 0 \pmod{k}$ et $1 \leq \nu \leq k-1$, quel que soit $l = 1, \dots, s$.

Toute égalité qui peut se mettre sous la forme 2) $f(a_1, \dots, a_n) = 1$ où $a_i \in A$, $i = 1, \dots, n$ et où $f(a_1, \dots, a_n)$ est une composition finie des éléments a_1, \dots, a_n porte le nom de *relation* entre éléments de A . Tout ensemble A d'éléments de G est lié par un certain nombre de relations qui découlent des axiomes de groupe. De telles relations sont appelées *triviales*. Le premier membre de toute relation triviale est complètement réductible. Il peut se mettre sous la forme d'un produit de puissances entières d'un nombre fini d'éléments de A , dont tous les exposants sont nuls. Tout ensemble A d'éléments de G qui ne sont liés que par des relations triviales est dit *libre* ou *indépendant*.

Par contre, un ensemble A d'éléments de G est dit *dépendant* ou *lié* s'il existe entre des éléments de cet ensemble au moins une relation non triviale. L'ensemble formé d'un seul élément a de G est libre ou lié suivant que a est d'ordre infini ou fini. Tout ensemble d'éléments de G qui comprend au moins un élément d'ordre fini est lié. Une relation 2) entre éléments de A est dite *triviale modulo k* où k est un entier donné ≥ 2 , si son premier membre est complètement réductible modulo k . Les éléments de A sont dits *libres* ou *indépendants modulo k* s'ils ne sont liés que par des relations triviales modulo k . Par contre, on dira que les éléments de A sont liés ou dépendants modulo k s'il existe entre ces éléments au moins une relation qui n'est pas triviale modulo k .

La relation 2) est dite *quasi triviale* (quasi triviale modulo k) si son premier membre est de degré nul (de degré $\equiv 0 \pmod{k}$) par rapport à tout élément de A . Elle est dite *pseudo-triviale* (pseudo-triviale modulo k) si son premier membre est de degré nul (de degré $\equiv 0 \pmod{k}$) par rapport à l'ensemble des éléments de A . Les éléments de A sont *quasi indépendants* (quasi indépendants modulo k) s'ils ne sont liés que par des relations quasi triviales (quasi triviales modulo k). Et les éléments de A sont dits pseudo-libres (pseudo-libres modulo k) si toute relation qui les lie est pseudo-libre (pseudo-libre modulo k). Une relation qui ne rentre dans aucune des catégories énumérées ci-dessus est appelée *non triviale au sens strict*.

Un groupe multiplicatif G est *libre* (*libre modulo k*) s'il possède au moins un ensemble de générateurs appelés *générateurs libres* (libres modulo k) qui ne sont liés que par des relations triviales (triviales modulo k). Il est *quasi libre* (*quasi libre modulo k*) s'il possède au moins un ensemble de générateurs — dits *quasi libres* (*quasi libres modulo k*) — qui ne sont liés que par des relations quasi triviales (quasi triviales modulo k). G est *pseudo-libre* (pseudo-libre modulo k) s'il possède au moins un ensemble de générateurs — dits *pseudo-libres* (*pseudo-libres modulo k*) qui ne sont liés que par des relations pseudo-triviales (pseudo-triviales modulo k). Le groupe G est *lié* si tout ensemble de ses éléments générateurs est lié par au moins une relation non triviale. Il est dit *lié au sens strict* s'il n'est ni libre, ni quasi libre, ni pseudo-libre, ni libre, quasi libre ou pseudo-libre modulo k quel que soit l'entier $k \geq 2$.

Un ensemble A de puissance ≥ 2 d'éléments d'un groupe multiplicatif G est dit *réductible* s'il existe au moins un sous-ensemble fini $A^* = \{a_1, \dots, a_m\}$ de A ($m \geq 2$) et un sous-ensemble fini B^* de G , de puissance inférieure à celle de A^* et tel que l'ensemble $A - A^* \cup B^*$ engendre, par composition finie, tous les éléments de A . Il est dit *irréductible* dans le cas contraire. Tout groupe multiplicatif qui possède au moins un ensemble irréductible de générateurs est dit *fondamental* et tout ensemble irréductible de générateurs d'un groupe fondamental

constitue une *base* de ce groupe. Les groupes libres, libres modulo k , quasi libres et quasi libres modulo k , sont tous fondamentaux. Mais un groupe pseudo-libre n'est pas forcément fondamental. Tout groupe libre est libre modulo k , quasi libre, quasi libre modulo k , pseudo-libre et pseudo-libre modulo k , quel que soit l'entier $k \geq 2$. Tout groupe libre modulo k est quasi libre modulo k et tout groupe de ce dernier type est pseudo-libre modulo k , mais il existe une infinité de groupes libres modulo k qui ne sont pas libres, de groupes quasi libres qui ne sont pas libres et de groupes pseudo-libres qui ne sont pas quasi libres.

Soit $E_{g.l.} [E_{g.q.l.}] \{E_{g.p.l.}\}$ l'ensemble de tous les groupes libres distincts [l'ensemble de tous les groupes quasi libres distincts] { l'ensemble de tous les groupes pseudo-libres distincts }, soit $E_{g.l. \bmod k} [E_{g.q.l. \bmod k}] \{E_{g.p.l. \bmod k}\}$ l'ensemble de tous les groupes distincts libres modulo k [quasi libres modulo k] { pseudo libres modulo k } $k = 2, 3, \dots$ et soient $T_1 = \{E_{g.l. \bmod k}\}, k = 2, 3, \dots, T_2 = \{E_{g.q.l. \bmod k}\}, k = 2, 3, \dots, T_3 = \{E_{g.p.l. \bmod k}\}, k = 2, 3, \dots$. On peut munir les trois ensembles, T_1, T_2, T_3 d'une structure de treillis en établissant de la façon suivante un ordre partiel des éléments de ces trois ensembles: $E_{g.l. \bmod k} < E_{g.l. \bmod k'}$ si $k' \equiv 0 \pmod{k}$, auquel cas $E_{g.l. \bmod k}$ est un sous-ensemble de $E_{g.l. \bmod k'}$. De même $E_{g.q.l. \bmod k} < E_{g.q.l. \bmod k'}$ et $E_{g.p.l. \bmod k} < E_{g.p.l. \bmod k'}$ si $k \equiv 0 \pmod{k'}$. Avec cette notion d'ordre partiel, on obtient trois treillis: celui des ensembles de groupes libres modulo k , celui des ensembles, de groupes quasi libres modulo k et celui des ensembles de groupes pseudo libres modulo $k, k = 2, 3, \dots$. Entre les différents ensembles introduits ci-dessus on a les relations suivantes: $E_{g.l.} \subset E_{g.q.l.} \subset E_{g.p.l.}, E_{g.l.} = \bigcap_{k=2}^{\infty} E_{g.l. \bmod k}, E_{g.q.l.} = \bigcap_{k=2}^{\infty} E_{g.q.l. \bmod k}, E_{g.p.l.} = \bigcap_{k=2}^{\infty} E_{g.p.l. \bmod k}$.

Soit, d'autre part, $E_{g.f.}$ l'ensemble des groupes fondamentaux et $E_{g.n.f.}$ l'ensemble des groupes non fondamentaux distincts. On a $E_{g.q.l.} \subset E_{g.f.}$, mais l'intersection de $E_{g.p.l.}$ avec chacun des ensembles $E_{g.f.}$ et $E_{g.n.f.}$ est $\neq 0$.

Soit, à présent, G un groupe abélien et soit $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ un ensemble fini d'éléments de G . Les éléments de A sont *indépendants* (*indépendants modulo k*) si une relation 3) $a_1^{j_1} \dots a_m^{j_m} = 1$ entre des éléments a_1, \dots, a_m de A ne peut avoir lieu que si $j_i = 0$ ($j_i \equiv 0 \pmod{k}$) quel que soit $i = 1, \dots, m$. Par contre, les éléments de A sont liés (*liés modulo k*) s'il existe au moins un système d'entiers j_1, \dots, j_m , dont l'un au moins est $\not\equiv 0 \pmod{k}$ et pour lequel la relation 3) a lieu.

Si des éléments d'un groupe abélien sont liés, ils sont aussi liés modulo k pour une infinité de valeurs de l'entier $k \geq 2$.

Et si A est un ensemble infini d'éléments d'un groupe abélien G , les éléments de A sont indépendants si tout sous-ensemble fini de A est libre et les éléments de A sont liés s'il existe au moins un sous-ensemble fini de A formé d'éléments dépendants.

Tout groupe abélien fini ou à un nombre fini de générateurs est fondamental.

Si un groupe abélien G possède des systèmes finis de générateurs, on définit différentes bases de G . Une *base* tout court est un ensemble irréductible quelconque de générateurs de G . Les éléments d'une base peuvent être liés. Une *base normale* de G est un ensemble de générateurs a_1, \dots, a_m , tel que tout élément a de G peut se mettre de façon unique sous la forme $a_1^{j_1} \dots a_m^{j_m}$ où j_i est un entier compris entre 0 et l'ordre n_i de l'élément a_i , quel que soit $i = 1, \dots, m$. Une base normale peut être réductible. On appelle *base normale réduite* de G une base normale qui est irréductible et dont les éléments peuvent être ordonnés en une suite a_1, \dots, a_m , telle que l'ordre de a_i est un diviseur de celui de a_{i+1} quel que soit $i = 1, \dots, m - 1$.

Si le groupe G est d'ordre infini, il peut ne pas être fondamental et par suite il peut être dépourvu d'ensembles irréductibles de générateurs; une *base normale* de G est un ensemble A de générateurs de G tel que tout élément de G peut se mettre de façon unique sous la forme d'un produit $a_1^{j_1} \dots a_m^{j_m}$ où a_1, \dots, a_m sont $m \geq 1$ éléments distincts de A et l'entier j_l est compris entre 0 et l'ordre n_l de a_l , $l = 1, \dots, m$. Un groupe abélien d'ordre infini peut être dépourvu de bases normales, même s'il est engendré par un nombre fini d'éléments et, même s'il possède des bases normales, celles-ci peuvent être réductibles.

A tout groupe quasi libre modulo k , G , on peut associer un groupe fondamental abélien $F^{(n)}$ qui possède des bases normales et dont toute base normale est irréductible.

Tout groupe pseudo libre G possède une infinité de sous-groupes invariants propres, il est d'ordre infini, chaque élément pseudo-libre d'un tel groupe est d'ordre infini et tout élément de G possède un degré fixe par rapport à l'ensemble des éléments de tout ensemble de générateurs pseudo-libres de G .