# 10. Les directions d'amarrement.

Nous retrouvons ainsi, sous des formes plus précises, la question de la mécanique des fluides dont nous étions partis. A cet effet, on prendra pour $T$ le substratum d'une variété de contact.

### 10. Les directions d'amarrement.

Pour bien comprendre l'équation (9.8), à laquelle nous sommes aboutis, nous aurons besoin d'un lemme assez simple sur les multivecteurs quelconques, et ce lemme va dépendre d'une définition que nous allons illustrer par une image nautique.

Un bateau, qui entre dans un port, ne peut s'amarrer que dans certaines directions « d'amarrement ». L'ensemble des directions d'amarrement dépendra évidemment de celui des jetées non parallèles qu'on aura construit dans le port.

Nous définirons de même les directions d'amarrement d'un multivecteur quelconque $j$, et l'ensemble de ces directions dépendra des multivecteurs simples qui sont nécessaires pour représenter $j$ comme leur somme.

Si $j$ est un multivecteur simple non nul, on l'exprime comme produit extérieur de vecteurs $j = v_1 \times v_2 \times \ldots \times v_k$ et l'on nomme direction d'amarrement de $j$ toute direction qui est celle d'une combinaison linéaire $v = \Sigma\, c_\sigma\, v_\sigma$, à coefficients réels $c_\sigma$, des vecteurs $v_\sigma$ ($\sigma = 1, 2, \ldots, k$). Une telle combinaison linéaire sera elle-même dite vecteur d'amarrement.

Dans le cas général, où $j$ est composé, on dira d'un vecteur $v$, ou d'une direction $v$, que c'est un vecteur, ou une direction, d'amarrement de $j$, si pour chaque décomposition $j = \Sigma\, j_\nu$ de $j$ comme une somme de multivecteurs simples $j_\nu$, qu'on aura exprimés comme produits extérieurs de vecteurs $v_{\nu 1}, v_{\nu 2}, \ldots, v_{\nu k}$, correspondants, il existe une expression de $v$ comme une combinaison linéaire $v = \Sigma_{\nu,\sigma}\, c_{\nu\sigma}\, v_{\nu\sigma}$, des différents vecteurs $v_{\nu\sigma}$.

Nous dirons encore que le multivecteur $j$ est situé dans un espace $\Pi$, où $\Pi$ désigne un sous-espace linéaire de l'espace des $x$, si $\Pi$ comprend des vecteurs $v_{\nu\sigma}$ tels que $j$ se laisse exprimer comme une somme $\Sigma j_\nu$, où chaque $j_\nu$ est un produit extérieur des $v_{\nu\sigma}$ correspondants. On voit de suite que les directions d'amarrement de $j$ sont les directions communes à tous les espaces $\Pi$ dans lesquels $j$ est situé. La partie commune de ces espaces $\Pi$, qui est aussi l'espace des points définis par les vecteurs d'amarrement de $j$, sera dit espace d'amarrement de $j$.

(10.1) *Lemme.* — (i) Chaque multivecteur $j$ est situé dans son espace d'amarrement. (ii) Les directions d'amarrement d'un $k$-vecteur $j$ sont celles de la forme $j \otimes j'$ où les $j'$ sont des $(k-1)$-vecteurs.

*Démonstration.* — Pour établir le premier énoncé, il suffira de vérifier que, si $j$ est situé dans $\Pi'$ et $\Pi''$, alors $j$ est situé également dans leur intersection $\Pi$. Par une transformation élémentaire de l'espace des $x$ en lui-même, on peut supposer que $\Pi'$, $\Pi''$ sont les sous-espaces définis par deux sous-ensembles du système de coordonnées de $x$. Mais alors chaque composante non nulle de $j$ sera située à la fois dans $\Pi'$ et dans $\Pi''$, donc dans $\Pi$. Donc $j$, comme somme de ses composantes cartésiennes, sera également situé dans $\Pi$. Pour établir le second énoncé, soit $\Pi_0$ l'espace d'amarrement du $k$-vecteur $j$, et soit $\Pi_1$ l'espace des points de la forme $j \otimes j'$, où les $j'$ sont des $(k-1)$-vecteurs. Evidemment $\Pi_1$ est un sous-espace de $\Pi_0$. Il nous faut démontrer qu'il coïncide avec ce dernier. Supposons le contraire. Il existe alors dans $\Pi_0$ une direction $v$ orthogonale à $\Pi_1$; désignons par $\Pi$ l'espace formé des vecteurs de $\Pi_0$ orthogonaux à $v$. Par définition de $v$, l'espace $\Pi_1$ ne peut contenir aucun vecteur de la forme $v + u$, où $u \in \Pi$. D'autre part, on peut exprimer $j$ comme la somme de deux projections orthogonales, d'après l'identité (4.3) de [11]. On trouve

$$j = a + (v \times b)$$

où $a = (v \times j) \otimes v$ et $b = j \otimes v$ sont situés dans $\Pi$. Ici $b$ n'est pas nul, sans quoi $j$ serait situé dans $\Pi$; on peut donc définir $j' = b/|b|^2$, $u = a \otimes j'$, d'où il ressort que $j \otimes j' = v + u$, donc que $v + u \in \Pi_1$, ce qui contredit ce que nous avons trouvé plus haut. La démonstration est donc achevée.

Dans le cas d'un multivecteur $Q(x)$ $k$-dimensionnel, nous nommerons vecteur d'amarrement local de $Q$ tout vecteur $v(x)$ de la forme $v = Q \otimes Q'$ où $Q'$ est un $(k-1)$-vecteur constant. La direction d'un tel vecteur non nul sera dite direction d'amarrement locale de $Q$. L'équation (9.8) signifie que pour le courant

$T = \rho Q$, les vecteurs $v$ d'amarrement locals de $Q$ vérifient l'équation de continuité des fluides. Remarquons encore que l'opération de comultiplication par un $(k - 1)$-vecteur constant rappelle une opération analogue utilisée pour définir les contours d'une variété généralisée [11].

Permettons-nous, pour terminer ce paragraphe, une observation, très heuristique et superficielle, sur la signification de l'équation (9.8). Dans cette équation $\rho$ prend la place d'une mesure, tandis que $v$ est une fonction à valeurs vectorielles. Avec des conventions appropriées, on pourra, d'après (9.2), écrire (9.8) sous la forme:

(10.2) $$v \otimes \text{grad } \rho + \rho \text{ div } v = 0.$$

Elle nous dit que dans la direction $v$, le gradient d'une mesure se comporte d'une façon relativement régulière. On peut l'interpréter comme exigeant une espèce de continuité absolue dans la direction $v$. Il est assez plausible que la mesure $\rho$, si elle est absolument continue dans les différentes directions d'amarrement locales, se révélera comme une intégrale multiple par rapport à ces directions, d'où l'on entrevoit que le courant $\rho Q$ doit être lagrangien. Serait-ce là un mirage ? Ou est-ce le germe d'une démonstration ? C'est au lecteur à y réfléchir.

## 11. Principes de réduction.

Deux variétés généralisées seront dites complémentaires, si leur somme est close, et si elles possèdent deux supports boréliens disjoints. Une propriété possédée par certaines variétés généralisées sera dite $\sigma$-additive si une variété généralisée s'exprimant comme une somme dénombrable $\Sigma \mathscr{L}_\nu$ la possède, dès que chaque $\mathscr{L}_\nu$ la possède. Enfin une variété généralisée $\mathscr{L}$ de dimension $k$ dans l'espace des $x$ de dimension $n$, sera dite inductive si la relation $\tau^{-1} \tau A = \partial^{-1} \partial A$ est valable pour les variétés généralisées de dimension $(k - 1)$ dans un espace $(n - 1)$-dimensionnel.

(11.1) *Principe du $\sigma$-polytope complémentaire.* — Soit $\mathscr{L}$ *une* variété généralisée de frontière $A$ et de dimension $k$ dans l'espace $n$-dimensionnel où $o < k < n$. Alors il existe un $\sigma$-polytope avec poids, complémentaire à $\mathscr{L}$.