

9. L'ÉQUATION DE CONTINUITÉ DES FLUIDES.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **11 (1965)**

Heft 2-3: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

On remarquera sans peine que certaines des inclusions (8.5) sont strictes, mais il est possible que d'autres se réduisent à des égalités.

Les mêmes inclusions sont encore valables, si l'on désigne par les symboles A_d , A , A_g , etc., les classes correspondantes de variétés de contact d'un système donné d'équations différentielles de la forme (2.1), ou d'un système analogue k -dimensionnel.

Pour bien comprendre un tel système, et pour bien comprendre la notion de variété, au sens généralisé que nous utilisons ici, il faudra avant tout, selon la remarque à la fin du paragraphe 3, étudier la question de savoir quelles inclusions (8.5) se réduisent peut-être à des égalités. Par exemple, l'égalité $\partial_g^+ = A^{-1} \partial A$ signifierait, pour les variétés de contact, que toute solution de frontière A de (2.1) se réduit à une variété de contact, presque lagrangienne, greffée. Ensuite, pour les inclusions strictes, on cherchera à caractériser chaque fois les membres de la classe étroite parmi ceux de la classe large.

9. L'ÉQUATION DE CONTINUITÉ DES FLUIDES.

C'est d'abord l'inclusion finale de (8.5) qui nous intéresse. Se réduirait-elle à une égalité ?

Pour simplifier, bornons-nous aux variétés généralisées closes faisant partie des classes considérées. Cette réduction n'est possible, à vrai dire, que pour $k < n$, nous y reviendrons après ce paragraphe. Rappelons qu'une variété généralisée est dite close, lorsque sa frontière s'annule.

La question que nous nous sommes posée devient la suivante : une variété généralisée close a-t-elle le même substratum qu'une variété lagrangienne ? En d'autres termes : un substratum clos est-il lagrangien ? Nous allons donner à cette question une autre forme, qui nous rapproche encore de la mécanique classique des fluides.

Nous aurons besoin de quelques notations.

Nous utiliserons pour la multiplication extérieure des multivecteurs le signe $\times$. On définit alors la comultiplication $\otimes$ par la formule $a \otimes b = (a^* \times b)^*$, où l'astérisque désigne la normale. Rappelons que la normale a^* d'un k -vecteur a se définit

comme un $(n - k)$ -vecteur de même grandeur, tel que l'on ait $a \times a^* = |a|^2$. (Il serait plus correct d'écrire au côté gauche $(a \times a^*)^*$, car on distingue entre une quantité scalaire, appelée O -vecteur, et un n -vecteur, qu'on nomme également pseudo-scalaire. La normale d'une quantité scalaire sera pseudo-scalaire, et vice versa.) Pour le rôle de ces opérations dans la théorie des variétés généralisées, on consultera [11].

Nous écrirons encore $\partial^+/\partial x$ et $\partial^-/\partial x$ pour le vecteur dont les composantes sont les opérations de dérivation partielle, agissant sur ce qui suit, ou sur ce qui précède, le vecteur en question. Nous poserons

$$\text{rot } Q = \frac{\partial^+}{\partial x} \times Q, \quad \text{div } Q = Q \otimes \frac{\partial^-}{\partial x},$$

où Q désigne une fonction $Q(x)$ dont les valeurs sont des multivecteurs composés. On écrit grad au lieu de rot, si Q se réduit à une fonction scalaire. On notera la formule

$$(9.1) \quad \text{div } (Q \otimes Q') = (-)^{k'} \{Q \otimes \text{rot } Q' + (\text{div } Q) \otimes Q'\},$$

où Q, Q' désignent des fonctions dont les valeurs sont des multivecteurs composés, et où k' désigne la dimension de Q' . En particulier, si l'on prend pour Q' une fonction scalaire ρ , on aura

$$(9.2) \quad \text{div } (\rho Q) = Q \otimes \text{grad } \rho + \rho \text{div } Q$$

Rappelons encore une conséquence de la formule (9.1) dans la théorie des distributions et des courants. Nous désignerons à cet effet par k la dimension de Q et nous poserons $k' = k - 1$. Nous supposerons en outre que Q' soit infiniment différentiable, et nous l'identifierons, comme nous l'avons convenu plus haut, avec une $(k - 1)$ -forme g . On peut alors prendre pour Q une distribution dont les valeurs sont des multivecteurs, de sorte que Q devient un courant T de dimension k . Nous supposerons encore que l'une des quantités T, g au moins ait un support compact. En écrivant $S = \text{div } T$, et en tenant compte du fait que, dans la théorie des distributions, l'intégrale (sur tout l'espace) d'une divergence à support compacte s'annule, on trouve

$$O = T(\text{rot } g) + S(g).$$

Ici le symbole $\text{rot } g$ est à proprement parler inexact, car c'est pour la fonction Q' plutôt que pour la forme g que nous avons défini l'opération rot . Dans la théorie des formes différentielles, on écrit dg et non $\text{rot } g$. La formule devient

$$(9.3) \quad O = T(dg) + S(g);$$

elle sert de définition pour la fonctionnelle $S(g)$, donc pour le courant S , puisque g y désigne une $(k-1)$ -forme arbitraire. D'autre part, dg désigne une forme exacte arbitraire, et la fonctionnelle $T(dg)$ définit la frontière de T . Ainsi: les courants T clos sont ceux qui vérifient l'équation $S = 0$, c'est-à-dire

$$(9.4) \quad \text{div } T = 0.$$

Supposons, en particulier, que T soit borné et à support compact, c'est-à-dire que T soit un substratum. La fonctionnelle $T(f)$ sera alors de la forme analogue à (3.2)

$$(9.5) \quad T(f) = \int Q(x) f(x) d\mu,$$

où Q désigne une fonction dont les valeurs sont des k -vecteurs composés, que nous supposerons de grandeur unité, et où $d\mu$ désigne une mesure. La forme f a été remplacée ici, selon notre coutume, par la fonction correspondante à valeurs k -vectorielles, définie par ses coefficients. Or on écrit plutôt, dans la théorie des distributions, pour $d\mu$, l'expression ρdx où dx est la mesure ordinaire dans l'espace des x , et où ρ est une distribution que nous nommerons la densité. On écrira alors $T = \rho Q$, ce qui signifie en effet,

$$(9.6) \quad T(f) = \int Q(x) \rho(x) f(x) dx,$$

selon les conventions de la théorie des distributions.

En interprétant la fonction $Q(x)$ à valeurs k -vectorielles comme une généralisation de la vitesse d'un fluide stationnaire de densité $\rho(x)$, on voit qu'un substratum clos, c'est-à-dire le substratum d'une variété généralisée close, vérifie la même équation de continuité que l'on trouve en mécanique des fluides pour le cas stationnaire:

$$(9.7) \quad \text{div } (\rho Q) = 0$$

Il y a cependant une légère différence. Ici l'équation a un sens global, et les deux facteurs ρ et Q sont à prendre ensemble: on ne les sépare pas comme au côté droit de (9.2) parce que la multiplication des distributions nécessite quelques précautions. Dans la mécanique classique des fluides ρ et Q sont analytiques et ces précautions deviennent superflues. De plus, l'équation (9.7) a alors un sens local, et se trouve vérifiée à l'intérieur d'un fluide.

Puisque nous renonçons ici aux hypothèses d'analyticité, la seule différence qui subsistera concernera ce caractère local. Nous considérerons donc une famille de substrata qui sera plus générale que celle des substrata clos; ses membres seront donnés par les quantités ρ , Q comme plus haut, mais l'équation de continuité (9.7) sera supposée vérifiée localement.

On dit qu'une distribution S s'annule dans le voisinage du point x_0 , s'il existe une fonction $h(x)$, infiniment différentiable et non négative, telle que l'on ait $h(x) = 1$ dans un voisinage de x_0 , et $hS = 0$. Nous dirons que notre courant $T = \rho Q$ vérifie (9.7) localement, si sa divergence s'annule au voisinage de tout point d'un ouvert G , tel que G constitue pour T , c'est-à-dire pour la mesure définie par ρ , un support borélien.

Remarquons que de l'équation de continuité (9.7), on peut déduire d'autres du même genre, par l'intermédiaire de (9.1). En effet, si l'on remplace dans cette dernière, Q par T , et si l'on y choisit pour Q' un multivecteur constant, ou plus généralement un multivecteur $Q'(x)$ dont la rotation s'annule, on trouvera

$$(9.8) \quad \operatorname{div}(\rho \varphi) = 0$$

où $\varphi = Q \otimes Q'$. En particulier, si la dimension de Q' est $(k - 1)$, où k est celle de Q , l'expression φ sera un vecteur ordinaire, et (9.8) se réduit à l'équation de continuité d'un fluide stationnaire ordinaire.

La question du début de ce paragraphe est devenue la suivante: un courant de la forme $T = \rho Q$ non lagrangien peut-il vérifier l'équation de continuité (9.7)? Peut-il la vérifier, sinon globalement, au moins localement? Peut-il enfin vérifier l'équation de continuité ordinaire (9.8) pour $\varphi = Q \otimes Q'$, et pour chaque choix constant de Q' de dimension $(k - 1)$?

Nous retrouvons ainsi, sous des formes plus précises, la question de la mécanique des fluides dont nous étions partis. A cet effet, on prendra pour T le substratum d'une variété de contact.

10. LES DIRECTIONS D'AMARREMENT.

Pour bien comprendre l'équation (9.8), à laquelle nous sommes aboutis, nous aurons besoin d'un lemme assez simple sur les multivecteurs quelconques, et ce lemme va dépendre d'une définition que nous allons illustrer par une image nautique.

Un bateau, qui entre dans un port, ne peut s'amarrer que dans certaines directions « d'amarrement ». L'ensemble des directions d'amarrement dépendra évidemment de celui des jetées non parallèles qu'on aura construit dans le port.

Nous définirons de même les directions d'amarrement d'un multivecteur quelconque j , et l'ensemble de ces directions dépendra des multivecteurs simples qui sont nécessaires pour représenter j comme leur somme.

Si j est un multivecteur simple non nul, on l'exprime comme produit extérieur de vecteurs $j = \varphi_1 \times \varphi_2 \times \dots \times \varphi_k$ et l'on nomme direction d'amarrement de j toute direction qui est celle d'une combinaison linéaire $\varphi = \sum c_\sigma \varphi_\sigma$, à coefficients réels c_σ , des vecteurs φ_σ ($\sigma = 1, 2, \dots, k$). Une telle combinaison linéaire sera elle-même dite vecteur d'amarrement.

Dans le cas général, où j est composé, on dira d'un vecteur φ , ou d'une direction φ , que c'est un vecteur, ou une direction, d'amarrement de j , si pour chaque décomposition $j = \sum j_v$ de j comme une somme de multivecteurs simples j_v , qu'on aura exprimés comme produits extérieurs de vecteurs $\varphi_{v1}, \varphi_{v2}, \dots, \varphi_{vk}$, correspondants, il existe une expression de φ comme une combinaison linéaire $\varphi = \sum_{v,\sigma} c_{v\sigma} \varphi_{v\sigma}$, des différents vecteurs $\varphi_{v\sigma}$.

Nous dirons encore que le multivecteur j est situé dans un espace Π , où Π désigne un sous-espace linéaire de l'espace des x , si Π comprend des vecteurs $\varphi_{v\sigma}$ tels que j se laisse exprimer comme une somme $\sum j_v$, où chaque j_v est un produit extérieur des $\varphi_{v\sigma}$ correspondants. On voit de suite que les directions d'amarrement de j sont les directions communes à tous les