

RELATIONS ENTRE L'ARITHMÉTIQUE ET L'ALGÈBRE DANS L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES POUR LES ENFANTS JUSQU'A L'AGE DE QUINZE ANS

Autor(en): **Straszewicz, Stefan**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **10 (1964)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-39425>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

COMMISSION INTERNATIONALE DE L'ENSEIGNEMENT
MATHÉMATIQUE (C.I.E.M.)

RELATIONS ENTRE L'ARITHMÉTIQUE ET L'ALGÈBRE
DANS L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES POUR
LES ENFANTS JUSQU'A L'AGE DE QUINZE ANS

par Stefan STRASZEWICZ

*(Rapport présenté au Congrès International des Mathématiciens
à Stockholm le 16 août 1962).*

Le présent rapport constitue une synthèse des rapports sur le 3^e thème élaborés par les Sous-Commissions nationales des 11 pays suivants: Autriche, Etats-Unis d'Amérique, France, Grande Bretagne, Hollande, Hongrie, Italie, Pologne, République Fédérale Allemande, Suède et Yougoslavie. L'instruction scolaire commençant dans ces pays à l'âge de 6 ou 7 ans, l'objet des rapports concerne les 8 ou 9 premières années d'enseignement.

1. Il convient de faire tout d'abord une remarque générale. On poursuit partout aujourd'hui des études tendant à réformer les programmes traditionnels, perfectionner les méthodes d'enseignement et produire de meilleurs manuels. De tels travaux sont entrepris par les associations des mathématiciens ou par des groupes de professeurs d'universités en collaboration avec les professeurs de l'enseignement secondaire et aussi individuellement. Il n'y a pas longtemps le programme de l'arithmétique et de l'algèbre pour les classes inférieures des écoles de divers pays ne déviait pas beaucoup du schéma suivant:

Les 4 ou 5 premières années: Les nombres naturels et zéro, notation décimale, les 4 opérations, le système métrique.

La 5^e et 6^e années, parfois aussi la 7^e: fractions ordinaires, fractions décimales, proportions, diverses applications pratiques.

Dans la 7^e, 8^e et 9^e année on enseignait une discipline nouvelle — l'algèbre — comprenant les opérations sur les expressions algébriques entières, fractionnaires, ensuite aussi irrationnelles, on introduisait les nombres relatifs et on traitait les équations du 1^{er} et puis du 2^d degré.

L'arithmétique scolaire et l'algèbre scolaire étaient ainsi des matières distinctes. En arithmétique on développait surtout l'habileté dans les calculs numériques et dans la solution des problèmes textuels par divers procédés, dits « arithmétiques ». En algèbre on enseignait les transformations des expressions littérales et la résolution des équations avec leur application aux problèmes. Les questions de logique jouaient dans l'enseignement un rôle insignifiant. Les théorèmes n'existaient qu'en géométrie. Les idées unificatrices des mathématiques modernes étaient une chose totalement inconnue.

Une caractérisation toute pareille de l'enseignement de l'arithmétique et de l'algèbre dans des classes inférieures de l'école secondaire a été donnée par M. le professeur H. F. FEHR dans son rapport général au Congrès d'Edimbourg en 1958)¹.

On ne pourrait affirmer que cet état de choses appartienne entièrement au passé. Mais plusieurs pays ont introduit dans les dernières années des réformes assez considérables; dans d'autres pays on est en train de préparer ou de discuter des réformes. Les tendances générales sont partout les mêmes. Il s'agit de rapprocher l'enseignement scolaire des mathématiques — même dans les classes inférieures — de la science contemporaine et de ses nouvelles applications en faisant introduire progressivement les éléments du langage mathématique moderne. On propose, par exemple, d'introduire assez tôt les plus simples notions de l'algèbre des ensembles et de la logique propositionnelle, de faire mieux ressortir les propriétés structurales des différents systèmes de nombres considérés au cours de l'enseignement, former la notion générale de fonction comme application d'un ensemble sur un autre ensemble et de s'en servir le cas échéant. On reconnaît généralement la nécessité de prendre mieux en considération le côté conceptuel de la matière enseignée et de

1) H. F. Fehr, The Mathematics Education of Youth, Enseignement Mathématique, II^e série, tome V, 1960 pp. 62-78.

ne pas se contenter d'entraîner aux calculs ou aux transformations.

2. En analysant ces questions, les rapports des sous-commissions nationales fournissent un grand nombre d'opinions et des observations précieuses. Cependant ils diffèrent considérablement entre eux par le choix des problèmes traités et par l'ampleur de leur exposé.

La sous-commission *hollandaise* a présenté un rapport très étendu (de plus de 120 pages) comprenant les contributions de 9 auteurs. On y trouve des études critiques sur divers problèmes pédagogiques importants tels que l'extension du système de nombres, introduction de la notation algébrique, les notions de fonction et de relation etc. et aussi sur les méthodes employées par divers manuels scolaires hollandais. Le rapport commence par un aperçu de l'évolution qu'ont subie les programmes scolaires. Il existe en Hollande une commission officielle constituée en 1961 pour étudier la modernisation de l'enseignement des mathématiques aux écoles secondaires. Le rapport hollandais a déjà été imprimé.

Le rapport *français* est aussi très détaillé. L'auteur y propose un programme de l'arithmétique et de l'algèbre pour la 7^e, la 8^e et la 9^e année de l'enseignement (classes de 5^e, 4^e, 3^e) sur la base d'un point de vue moderne. Ce projet est développé amplement et contient même un choix d'intéressants exercices. Il diffère sensiblement des programmes actuels, mais plutôt par la manière de présenter les choses que par le fond. D'ailleurs les instructions officielles ne s'opposent pas à une introduction modérée des notions et des symboles modernes. Des essais pareils ont été déjà tentés en France selon des initiatives individuelles et ont eu du succès.

Le rapport *allemand* analyse le programme et les méthodes d'enseignement de l'arithmétique et de l'algèbre dans des classes « Sexta » jusqu'à la « Tertia », c.à.d. depuis la 5^e jusqu'à la 9^e année d'instruction scolaire. Les pays de la République Fédérale étant autonomes dans le domaine culturel, la question de la modernisation des mathématiques scolaires y prend des aspects variés, mais partout elle se trouve à l'ordre du jour. Les

réformes proposées porteront en général un caractère modéré; le rapport indique leurs traits essentiels.

L'enseignement des mathématiques en *Autriche* reste fidèle aux principes renommés élaborés, il y a longtemps, dans les fameux « plans de Meran ». La conviction qu'une nouvelle réforme est devenue nécessaire, n'est pas encore très répandue. Mais le rapporteur ne doute point que les professeurs autrichiens s'initieront bientôt aux idées nouvelles en profitant des expériences d'autres pays. Le rapport commente l'enseignement actuel de l'arithmétique et de l'algèbre en Autriche jusqu'à l'âge de 15 ans et contient plusieurs remarques pédagogiques intéressantes.

Les rapporteurs *hongrois* discutent en détail les connexions entre l'arithmétique et l'algèbre scolaire en recommandant la suppression de leur séparation artificielle. Ils donnent des renseignements sur l'introduction des notions algébriques dans les classes inférieures des écoles hongroises. En Hongrie on a préparé une réforme d'enseignement des mathématiques qui entre en vigueur en 1963. On y attache une grande importance à l'étude soignée des notions mathématiques fondamentales.

Le rapport *britannique* présenté par la « Mathematical Association, Teaching Committee » est d'un caractère un peu différent. Le système scolaire anglais n'est pas uniforme. Il y a des écoles destinées spécialement aux enfants plus doués, d'autres aux enfants plus faibles, à côté des écoles du type intermédiaire. Il arrive aussi que dans une même école les élèves soient divisés en groupes selon leur aptitude pour les mathématiques. L'organisation scolaire et le choix des méthodes d'enseignement jouissent d'un degré considérable de liberté, n'étant pas soumises à une pression administrative. Il résulte de tout cela que l'enseignement des mathématiques présente des aspects très variés. Le rapport n'a en vue aucun type particulier de l'école secondaire et ne considère que des questions générales. Les auteurs constatent au début que l'opinion des professeurs sur l'enseignement secondaire des mathématiques a dernièrement beaucoup changé. On reconnaît la nécessité d'élargir les limites étroites de l'enseignement traditionnel et de mieux se conformer aux idées mathématiques modernes.

Les autres rapports sont moins étendus et donnent des aperçus plus condensés sur l'état actuel de l'enseignement et sur les tendances réformatrices dans leurs pays.

En *Italie* l'enseignement de l'arithmétique et de l'algèbre dans des classes inférieures présente un caractère empirique et intuitif. La coordination logique de la matière enseignée joue un rôle insignifiant, les vues modernes sont peu considérées. Selon l'opinion des rapporteurs, une réforme modérée des programmes et des méthodes s'impose et ils en indiquent les lignes directrices possibles. Ils donnent en outre leur avis sur quelques questions d'enseignement.

Le rapport *suédois* contient des remarques critiques sur l'enseignement actuel et des renseignements sur les travaux du « Comité Scandinave pour la Modernisation des Mathématiques Scolaires » comprenant des professeurs universitaires et des représentants de l'enseignement secondaire des 4 pays scandinaves. La tâche principale de ce Comité est de rédiger, sur des principes modernes, des nouveaux programmes et des manuels pour l'ensemble des mathématiques scolaires. Quelques-uns de ces manuels ont déjà paru, le rapporteur en indique les traits essentiels.

En *Yougoslavie* au cours de l'instruction obligatoire durant 8 ans, l'algèbre est enseignée après l'arithmétique. Le rapporteur est d'avis que ce système correspond bien au développement intellectuel progressif des élèves. On y tient largement compte des postulats modernes. Le rapport donne des précisions sur la manière adoptée pour traiter quelques questions fondamentales.

Dans l'enseignement secondaire des mathématiques aux *Etats-Unis* on constate des changements d'une grande portée qui se sont produits au cours des dernières années. Des groupes de professeurs de l'enseignement supérieur et secondaire, formés dans plusieurs centres universitaires, ont entrepris d'élaborer de programmes modernes et d'écrire des manuels exemplaires aussi bien pour les élèves que pour les enseignants. Une partie capitale de ce travail est déjà accomplie. Dans la suite je vais me rapporter à 2 manuels publiés par le « School Mathematics Study Group » (SMSSG); ce sont « Mathematics for Junior High School » (pour la 7^e et la 8^e classe) et « First Course in Algebra » (pour la 9^e classe). Il est à remarquer que les sujets considérés dans ces

livres sont à quelques exceptions près les mêmes que ceux proposés par L'Organisation Européenne de Coopération Economique (OEEC) pour le premier cycle de l'enseignement secondaire (élèves de 11 à 15 ans)¹⁾. Selon le rapporteur américain, les nouvelles méthodes d'enseignement se propagent très vite en U.S.A. En 1959/60, les manuels du MSG ont été employés dans plusieurs écoles des 45 Etats et on a obtenu de très bons résultats.

En *Pologne* l'amélioration de l'enseignement des mathématiques a été l'objet d'études d'une Commission de la Société Polonaise de Mathématique. Le projet d'une réforme modérée élaborée par cette commission a été accepté comme base de nouveaux programmes officiels qui vont entrer progressivement en vigueur à partir de l'année scolaire 1963. On est en train de préparer des manuels appropriés.

3. Qu'est-ce qui est arithmétique et qu'est-ce qui est algèbre dans les mathématiques scolaires? Une réponse exacte à cette question serait embarrassante, mais il ne semble pas nécessaire d'adopter dans ce rapport une classification déterminée. Dans la phase initiale de l'enseignement de l'arithmétique on forme chez les enfants les premières notions sur les nombres et sur les opérations en partant des expériences avec des objets concrets. Au cours des années suivantes le domaine des connaissances arithmétiques s'élargit, leur degré de généralité et d'abstraction augmente; l'arithmétique scolaire subit, pour ainsi dire, une « algébrisation ». La discussion des relations entre l'arithmétique et l'algèbre dans les classes inférieures de l'école secondaire a été conçue par les rapporteurs nationaux comme un échange de vues sur le choix du matériel destiné à être enseigné aux enfants de 11-15 ans ainsi que sur la manière de le présenter en classe. Dans la suite je vais passer en revue les plus essentielles des questions traitées dans les rapports nationaux.

4. *La notation algébrique.* — Il est important de familiariser assez tôt les élèves avec le langage algébrique. Comme le fait

¹⁾ Synopses for Modern Secondary School Mathematics, OEEC, Paris 1961.

observer un des rapporteurs hollandais, on prête souvent à cette question moins d'attention qu'il ne serait nécessaire. Le langage de l'algèbre est différent du langage courant et même de celui des premiers éléments d'arithmétique. Les règles de ce langage ne sont pas toujours suffisamment expliquées et les enfants ne s'en rendent compte qu'indirectement, quand on blâme leurs fautes.

Par exemple, le sens du signe d'égalité est très souvent mal compris par les élèves qui écrivent en toute tranquillité

$$3+7 = 10+2 = 12.$$

Pour y remédier, il faut des exercices appropriés.

Il faudrait aussi habituer les élèves le plus tôt possible à faire usage des signes $>$ et $<$. On devrait leur expliquer que les expressions contenant un signe d'égalité ou d'inégalité sont des phrases arithmétiques; en les exprimant en mots on fait voir qu'elles sont pareilles à des phrases affirmatives de la langue quotidienne.

Un moyen efficace de la syntaxe du langage algébrique sont les parenthèses. Habituellement on les introduit assez tôt (p. ex. en Pologne en 3^e) lorsqu'il s'agit des opérations successives, p. ex. $(2+3).5$; mais en même temps on convient d'omettre les parenthèses dans certains cas. Pour faire mieux comprendre le rôle des parenthèses comme des signes permettant d'isoler un certain tout, il ne faudrait pas se tenir rigoureusement à ces conventions et permettre aux élèves d'écrire par exemple $(2+3).5 = (2.5) + (3.5)$, sans traiter ceci comme une faute.

A l'usage des parenthèses s'attache une autre question importante, signalée dans les rapports hollandais et hongrois. En arithmétique élémentaire $2+3$ signifie un ordre: ajouter 3 à 2. Dans le langage de l'algèbre $2+3$ exprime le résultat d'une addition, c.à.d. le nombre 5. Pour qu'un tel sens des expressions arithmétiques soit bien inculqué aux enfants, il faut nombre d'exercices destinés spécialement à ce but. Si on les néglige, on aura des difficultés à faire comprendre le sens des expressions littérales, disons $a+b$. En effet: comment ajouter b à a , si l'on ignore ce que signifie a et ce que signifie b ? Des substitutions, comme $a = 2$, $b = 3$ ne suffiront pas pour supprimer cette diffi-

culté conceptuelle. Avant de passer aux expressions littérales, il faut apprendre à déchiffrer et à former correctement les expressions numériques.

Dans plusieurs pays on commence à employer des lettres pour désigner des nombres arbitraires dès la 5^e année de l'enseignement (Allemagne, France, Pologne). On se borne au début à des formules exprimant les lois fondamentales des opérations, à quelques formules géométriques ou physiques, et à de simples équations comme $2x+3=7$. La connexion entre l'arithmétique et l'algèbre qui trouve ici son expression dans le processus de généralisation des faits arithmétiques, est amplement discutée dans le rapport britannique; on y donne plusieurs exemples d'exercices d'un degré croissant de difficulté. En particulier on recommande de présenter une même relation sous formes différentes, par exemple $A = L.B$, $L = \frac{A}{B}$, $B = \frac{A}{L}$ dans le cas de l'aire d'un rectangle.

Les transformations des expressions algébriques sont d'ordinaire traitées d'une manière systématique dès la 7^e ou la 8^e classe (quand les élèves connaissent déjà les nombres relatifs et les fractions). A cette époque on commence aussi une étude systématique des équations.

Quelques rapports envisagent de plus près l'introduction des symboles littéraux. On distingue 3 cas d'intervention des lettres: a/ lettres en qualité de symboles généraux des nombres (les indéterminées), p. ex. dans l'identité $a+1=1+a$, b/ lettres comme inconnues p. ex. dans l'équation $a+1=3$, c/ lettres comme variables, quand on parle d'une fonction, p. ex. $a \rightarrow a^2$; on discute l'ordre dans lequel ces trois cas devraient être considérés dans l'enseignement. Selon l'opinion d'un des rapporteurs hollandais l'ordre: « d'abord l'inconnue et puis l'indéterminée » aurait l'avantage de pouvoir commencer par de très simples problèmes; d'autre part, l'ordre inverse ferait mieux ressortir le caractère logique des lettres en tant que variables dont les valeurs sont des nombres appartenant à un certain ensemble. L'ordre de succession mentionné ne devrait être choisi qu'en connexion avec toute la méthode adoptée dans l'enseignement. On conseille en outre de ne pas employer trop tôt le mot « vari-

able » qui pourrait occasionner des malentendus et de remettre son usage jusqu'à l'étude des fonctions.

En Yougoslavie on procède de la manière suivante. Les équations toutes simples interviennent déjà en arithmétique. Dès les premières leçons d'algèbre on introduit des lettres comme variables et on forme des expressions algébriques comme fonctions de ces variables. On choisit à cet effet de simples problèmes du genre usuel, concernant p. ex. la vente et l'achat, le mouvement uniforme etc.; en changeant les valeurs d'une des données on obtient des fonctions linéaires qu'on discute sans parler encore des fonctions en général.

Le rapport britannique conseille aussi de considérer des grandeurs variables le plus tôt possible.

Personnellement je ne crois pas qu'il soit nécessaire de distinguer dans l'enseignement les différents rôles des lettres; je voudrais plutôt l'éviter. Mais il importe d'introduire les symboles littéraux de telle manière, qu'ils n'aient rien de mystérieux pour les enfants. Je pense qu'on pourrait recommander le procédé suivant pareil d'ailleurs à la méthode du S.M.S.G.

1° On rappelle aux élèves qu'on emploie souvent des lettres en qualité de signes destinés à être remplacés par des noms de certains objets:

« La ville N », l'élève X »; on dit de même: « le nombre a » ce qu'on abrège en algèbre en disant « a » tout court.

2° On donne des exemples de propositions vraies et de propositions fausses:

« Rome se trouve en Europe », « Tokio se trouve en Europe »,
 $1+4 = 5$, $1+3 = 5$, $5 > 3$, $2 > 3$

3° On envisage les formes propositionnelles à une variable.

« La ville N se trouve en Europe », $1+a = 5$, $b > 3$,
 $1+x = x+1$, $y+1 > y$.

On fait reconnaître qu'aucun de ces énoncés n'est ni vrai ni faux; mais en y remplaçant les lettres par les noms des objets pris des ensembles convenables on obtient des propositions qui peuvent être aussi bien vraies que fausses et il y a pour chacun d'eux un « ensemble de solutions » correspondant.

4° On considère des exemples pareils à plus d'une variable.

5° On forme des propositions vraies ou des propositions fausses par une quantification des formes propositionnelles (sans introduire encore le terme quantificateur ni des symboles nouveaux):

« Pour un certain nombre a on a $1+a = 5$ ».

« Pour tout nombre a et pour tout nombre b on a $a+b = b+a$ ».

Il me semble que pour faire bien comprendre le sens des identités fondamentales il serait à souhaiter de les formuler à l'aide des quantificateurs. Plus tard on pourra admettre leur omission.

6° On forme enfin les phrases interrogatives:

« Pour quel a $1+a = 5$? », « pour quel a $1+a > 5$? »

On a alors affaire à un *problème*: résoudre une équation, résoudre une inéquation. Les lettres sont dans ce cas appelées « inconnues ».

En Pologne on a proposé de formuler de tels problèmes en écrivant

$$1+a \stackrel{?}{=} 5, \quad 1+a \stackrel{?}{>} 5$$

pour mettre bien en évidence qu'on pose ici une question. Il me semble que cette suggestion mérite l'attention.

D'après ce que je viens d'esquisser les exemples d'équations, d'inéquations et d'identités algébriques sont considérés en même temps. Je crois qu'il est avantageux de rapprocher dans l'enseignement des sujets apparentés et que pour rendre le langage algébrique familier aux enfants il faut des exercices très variés, de même que, pour bien saisir le sens d'un mot étranger, on doit connaître son application dans divers contextes.

5. *Equations*. — Selon l'opinion de plusieurs rapporteurs nationaux on peut très tôt initier les enfants à la résolution des équations, ce qu'on peut regarder comme une liaison entre l'arithmétique et l'algèbre. Il n'est pas question de donner du premier coup des règles générales; il suffit d'appliquer les propriétés connues des opérations. Dès la première classe on habitue

les enfants à des exercices tels que

$$2 + ? = 4 \quad \text{ou} \quad 2 \cdot \square = 6$$

où il faudrait accentuer que l'addition et la soustraction ainsi que la multiplication et la division sont des opérations inverses. Plus tard on pourrait parler des opérations inverses en général en considérant des exemples variés d'opérations qui se neutralisent mutuellement. Cela conduit facilement à la résolution des équations linéaires telles que

$$(x+3) \cdot 7 - 2 = 26$$

où il faut que l'élève trouve l'opération inverse à : ajouter 3, multiplier par 7, soustraire 2.

En Hongrie les exercices de ce genre sont déjà prévus pour la 5^e classe. En Pologne une méthode pareille est proposée aussi pour les inéquations linéaires.

Cela permet d'appliquer assez tôt la méthode des équations à des problèmes textuels traités ordinairement par divers procédés arithmétiques souvent bien artificiels. C'est ce que proposent quelques rapports. Les rapporteurs italiens, tout en reconnaissant l'avantage de la mise d'un problème en équation, sont pourtant d'avis que certains procédés traditionnels, par exemple l'usage des proportions, sont très instructifs et qu'on ne devrait pas les négliger. Je crois que le plus avantageux serait d'appliquer une méthode ou l'autre selon la nature du problème.

L'étude systématique des équations et aussi des inéquations linéaires a lieu le plus souvent dans la 8^e année de l'enseignement ; les équations du 2^e degré sont au programme de la 9^e. Les rapports nationaux n'expriment pas d'opinions sur la manière d'expliquer aux élèves les principes logiques de la résolution des équations. Autant que je sache, l'avis assez général est que la notion de l'équivalence des équations et les théorèmes sur l'équivalence sont des choses difficiles pour les élèves au dessous de 15 ans. Pour résoudre une équation on propose de supposer qu'elle est satisfaite par un certain nombre x_0 : en transformant l'égalité admise on trouve la valeur de x_0 . Dans cette méthode la vérification du résultat par substitution constitue un élément essentiel du raisonnement et ne peut être omise. Mais en effec-

tuant cependant de tels calculs dans le cas, par exemple, des équations linéaires, les élèves s'aperçoivent bien vite que la valeur obtenue satisfait toujours à l'équation donnée; ils pensent donc que ce n'est que la pédanterie du professeur qui leur impose des vérifications. Il est alors nécessaire d'entrer auparavant dans ce sujet en demandant si la suite des égalités, qu'on a déduites les unes des autres en résolvant l'équation, peut être parcourue dans le sens inverse. L'examen de cette question conduit aisément aux principes d'équivalence des équations. A un niveau plus élevé on devra étendre la notion d'équivalence aux systèmes d'équations et d'inéquations.

6. *Ensembles.* — On est généralement d'accord qu'un enseignement moderne de l'arithmétique et de l'algèbre ne peut se passer des notions concernant les ensembles. Mais il reste à discuter, quelles questions relatives aux ensembles pourraient être traitées dans des classes inférieures. Il me semble qu'il faudrait se borner aux rudiments du langage de la théorie des ensembles et habituer les élèves à en faire usage constant, ce qui ensuite faciliterait leurs études. Il serait prématuré de pousser l'étude des ensembles plus loin, d'établir par exemple plusieurs formules de l'algèbre des ensembles. Il me semble aussi qu'on ne devrait opérer qu'avec un petit nombre de symboles. Il est vrai que les symboles eux-mêmes ne présentent pas de difficultés particulières pour les élèves d'aujourd'hui qui, par exemple, connaissent très bien de nombreux signaux routiers, mais l'introduction de plusieurs signes à la fois n'est pas avantageuse pour l'enseignement. Les rapports nationaux donnent quelques suggestions en cette matière. Le plan français aborde ce sujet au commencement de la classe de 5^e (septième année d'enseignement) en connexion avec l'étude du système des nombres naturels. Les notions introduites sont les suivantes: ensemble, élément d'un ensemble, égalité, inclusion, intersection, réunion des ensembles, ensemble vide, ensembles complémentaires; on fait usage des symboles: \in , \subset , \cap , \cup , \emptyset et aussi des signes \Rightarrow et \Leftrightarrow d'implication et d'implication réciproque. On indique quelques simples formules comme $A \cap A = A$, $A \cup B = B \cup A$ etc. Dans la classe suivante on introduit les notions de la logique propositionnelle: implica-

tion, implication réciproque, négation, conjonction et disjonction en utilisant leur interprétation dans l'algèbre des ensembles sans introduire de nouveaux symboles.

En Allemagne on envisage un programme pareil qui serait réalisé graduellement dès la « Sexta » (5^e année), où on parlerait déjà des ensembles. Il existe déjà des manuels conformes à un tel programme. Les mêmes notions sont mentionnées dans le rapport hollandais, on y ajoute les quantificateurs « il existe » et « pour tout ». Le rapporteur ne précise pas quelles classes il a en vue, mais il conseille de traiter ces questions en connexion étroite avec les problèmes de géométrie (p. ex. lieux géométriques) et avec ceux d'algèbre (résolution des équations et des inéquations).

Un exposé simple et facile des premières notions de la théorie des ensembles et de la logique se trouve dans les manuels du SMSG pour la 7^e, 8^e et 9^e. On se contente ici d'un petit nombre de termes et de symboles en accentuant les notions de proposition, de fonction propositionnelle (« open sentence ») et de « l'ensemble de vérité » (truth set) correspondant ainsi que les applications de ces notions.

En Suède on propose d'introduire les notions concernant les ensembles au cours de la 7^e année d'enseignement, en Pologne — au cours de la 9^e.

Au sujet des ensembles une remarque s'impose. En expliquant au niveau élémentaire le sens du terme « ensemble » on parle d'habitude d'une « collection d'objets quelconques » en donnant des exemples pris entre autres dans la vie courante. Tout va bien tant qu'on ne considère que les ensembles finis. Mais en passant aux ensembles infinis on peut se trouver dans l'embarras. Une fois que je parlais de l'ensemble des nombres naturels avec quelques enfants, une fillette de 12 ans s'écria, surprise: « Comment donc! L'ensemble de tous les nombres naturels? Mais il n'y en a pas, parce qu'on peut avoir toujours de nouveaux nombres! » Je pense qu'on devrait plutôt expliquer la chose de la manière suivante: Au lieu de dire « 5 est un nombre naturel » on dit « 5 appartient à l'ensemble des nombres naturels » ou bien « 5 est un élément de l'ensemble des nombres naturels ». Cela serait plus conforme au sens mathématique du terme « en-

semble» et permettrait plus tard de mieux comprendre la notion d'une famille d'ensembles.

7. *Fonctions et relations.* — Tous les rapporteurs donnent leur opinion sur l'introduction de la notion de fonction. On recommande de commencer très tôt à préparer cette notion, par exemple dans la 5^e année ou même encore plus tôt en discutant des questions telles que la dépendance du résultat d'une opération arithmétique des nombres donnés, la proportionnalité directe et inverse (Autriche, Hongrie) ou bien en faisant usage de simples tables statistiques (Grande Bretagne). On croit nécessaire (ce qui est particulièrement accentué dans le rapport yougoslave) de développer l'idée de fonction d'une manière continue au cours de quelques années. Avant de donner une définition plus générale d'une fonction, ce qui peut arriver en 8^e, on devrait entraîner les élèves au cours des années précédentes à percevoir les relations fonctionnelles entre les grandeurs en utilisant dans ce but tout le matériel d'enseignement. Dans le projet français on introduit les fonctions en connexion avec le calcul algébrique en 4^e (c.à.d. dans la 8^e année) en employant la notation $x \rightarrow f(x)$, recommandée aussi par le rapport allemand. Le système de coordonnées et l'illustration géométrique de simples fonctions apparaît au plus tôt dans la 6^e année (Pologne), mais le plus souvent on ne le présente que dans la 7^e ou même dans la 8^e année (Allemagne, France, Suède, SMSG).

Il semble que dans la plupart des cas les fonctions considérées sont principalement, sinon exclusivement, des fonctions numériques d'une variable numérique qu'on fait représenter par des courbes dans un système cartésien. On peut se demander, s'il est justifié de se borner à ce cas particulier. Ne serait-il pas préférable de présenter aux élèves l'idée générale d'une fonction comme application d'un ensemble sur un autre ensemble? C'est ce que propose un des rapporteurs hollandais et les rapporteurs italiens. On peut traiter ce sujet d'une façon naturelle et le rendre attrayant et accessible aux enfants de 12 ans par exemple, en se servant des exemples qu'on trouve en abondance dans la vie de tous les jours. C'est aussi une occasion de lier l'algèbre à la géométrie, où la notion d'application est d'une utilité toute

particulière, aussi bien dans l'enseignement intuitif des classes inférieures qu'au niveau plus élevé. Le rapporteur hollandais y ajoute l'observation que l'usage des courbes représentatives, indispensable dans l'étude des expressions algébriques, voile cependant la notion d'application. Il importe donc que les enfants s'assimilent bien cette notion sur un matériel varié, avant qu'ils ne tracent des courbes.

Les rapports français et hollandais proposent d'introduire aussi quelques notions de la théorie des relations binaires. Il s'agit des notions : relation réflexive, symétrique, antisymétrique, transitive, relation d'ordre, relation d'équivalence, classes d'équivalence, définition par abstraction. On peut expliquer ces notions sur des exemples intervenant à chaque pas dans l'enseignement des mathématiques comme égalité et inégalité des nombres, inclusion, divisibilité, parallélisme etc. mais aussi sur des relations existant dans la vie courante, comme par exemple diverses relations de parenté. Les propriétés des relations peuvent être illustrées au moyen des graphes ou des tables, ce qui les rend claires et faciles à concevoir.

Je voudrais pourtant poser à ce propos une question. Personnellement je suis persuadé que les éléments de la théorie des relations ont plus d'importance que maints sujets traditionnels des mathématiques scolaires. Si nous apprenons à nos élèves d'apercevoir les relations et d'en formuler les propriétés, nous ferons pour leur éducation mathématique beaucoup plus qu'en les entraînant par exemple à la résolution des équations compliquées de toutes sortes. Mais est-il opportun de traiter les relations en général dans le premier cycle d'enseignement secondaire ? Ne serait-il pas suffisant de dire, par exemple, que tous les segments égaux ont la même longueur, sans préciser encore que l'égalité des segments est une relation d'équivalence et que par conséquent l'ensemble de tous les segments se répartit en classes de segments égaux ? A l'époque où les enfants prennent leur première connaissance des exemples de relations et de divers simples faits mathématiques, il serait peut-être prématuré de faire des généralisations qui, pour les élèves plus âgés, pourraient présenter sans nul doute un sujet très instructif et intéressant. Je verrais ici une application de la théorie des « niveaux

de pensée » de M. Van Hiele, mentionnée dans le rapport hollandais: les relations seraient une « operational matter » dans le premier cycle et une « subject matter » dans le second cycle.

8. *Le concept du nombre.* — a/ *Nombres naturels:* Il est évident qu'une théorie formelle des nombres naturels ne peut pas être présentée aux enfants au dessous de 15 ans. Les éléments de l'arithmétique des nombres naturels sont enseignés au cours de quelques premières années sur une base empirique et par des méthodes inductives. Plus tard, dans la 5^e, 6^e ou même dans la 7^e année, on entreprend d'ordinaire une étude systématique et plus complète des nombres naturels sur un niveau un peu plus élevé. On considère généralement comme essentiels les points suivants: Les propriétés fondamentales de l'addition et de la multiplication y compris les propriétés de 0 et de 1, la soustraction et la division traitées comme des opérations inverses de l'addition et de la multiplication, justification des règles des opérations dans la numération décimale. On apprend en outre la divisibilité, la décomposition des nombres en facteurs premiers, la recherche du plus grand commun diviseur et du plus petit commun multiple.

Il est aussi nécessaire de considérer les propriétés fondamentales des relations $>$, $<$ et \neq . Le projet français introduit en même temps — au commencement de la 7^e année — les relations \leq , \geq ; le rapporteur italien conseille de remettre ces dernières pour plus tard, car l'alternative qu'elles comportent, n'est pas toujours bien comprise par les élèves des classes inférieures. Le manuel du SMSG introduit la relation d'ordre au sens large et les symboles \geq , \leq , \nrightarrow , \nleftarrow au commencement de la 9^e année.

Les systèmes de numération autres que le décimal, en particulier la numération binaire et les techniques opératoires correspondantes, sont considérés généralement comme un sujet instructif contribuant à distinguer les nombres de leurs symboles et à mieux comprendre le rôle des lois fondamentales des opérations. Les rapports français et hollandais ainsi que le S.M.S.G. proposent ce sujet pour la 7^e année d'enseignement. Le rapporteur italien conseille de l'introduire assez tôt; traité adroitement par

le professeur, il deviendra alors une sorte de jeu amusant pour les enfants. Le rapporteur suédois est d'avis que les systèmes de numération sont un thème utile, mais plutôt pour les enfants mieux doués. En Allemagne on le juge convenable pour la « Sexta » (5^e année) en mettant l'accent sur le système binaire et son application aux machines électroniques.

Un autre sujet instructif, mais plus abstrait, est constitué par les opérations sur des classes résiduelles (mod. n). Leur étude serait d'une importance considérable comme un pas vers la formation des concepts généraux de l'algèbre. En introduisant les opérations sur les classes de restes, donc sur les objets autres que les nombres et en étudiant leurs propriétés, on prépare le terrain pour la notion générale d'opération et de structure algébrique. On pourrait toutefois se demander si c'est convenable pour le niveau considéré. Dans le projet français, on introduit les classes résiduelles en 5^e (7^e année de l'enseignement) et on y revient encore dans deux classes suivantes en connexion avec les équations diophantiennes du 1^{er} degré. Aux Etats-Unis on a essayé de traiter ces questions dans les classes de 7^e et de 8^e et on a obtenu des succès surprenants. Selon les expériences de l'un des rapporteurs italiens, les congruences sont un thème parfaitement accessible et intéressant pour les élèves de 12-13 ans. L'auteur du présent rapport a fait aussi des essais réussis avec des élèves de cet âge, mais c'étaient les enfants bien doués. Il semble qu'on doive penser ici plutôt aux enfants plus âgés, disons aux élèves de 14 ans.

La plus importante propriété des nombres naturels — le principe d'induction complète — est jugée trop difficile pour être comprise par les enfants de moins de 15 ans. On peut néanmoins envisager des expériences numériques propres à constituer une base intuitive de ce principe. Le rapporteur allemand semble suggérer cette idée par la méthode qu'il indique pour traiter les nombres naturels dans la « Sexta ».

b/ Nombres rationnels. Il est de tradition d'étendre le système des nombres naturels à celui des nombres rationnels en considérant d'abord les fractions et ensuite les nombres relatifs. Les rapporteurs donnent quelques justifications de cette pratique. Le rapporteur autrichien ne croit pas possible d'avancer

l'introduction des nombres négatifs. Dans la vie de tous les jours les enfants s'habituent assez tôt à faire usage de fractions simples telles que $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ ou $\frac{1}{8}$, tandis que pratiquement on n'a pas besoin de nombres négatifs. Leur introduction, motivée par des raisons théoriques, doit avoir lieu plus tard, conformément à l'ordre historique. Selon l'opinion du rapporteur yougoslave, les nombres relatifs présentent un plus grand degré d'abstraction que les fractions, car il apparaît ici un concept tout nouveau: celui d'un nombre muni d'un signe. Le rapporteur britannique considère les nombres relatifs comme un sujet difficile pour beaucoup d'élèves au dessous de 15 ans. Les rapporteurs italiens ne croient pas que les difficultés de nature psychologique soient plus grandes dans le cas des nombres négatifs que dans celui des fractions; mais d'autre part les fractions sont déjà familières aux élèves quand on aborde leur étude systématique. Quoiqu'il soit souhaitable d'avoir avant tout l'anneau des nombres entiers — du point de vue pédagogique il est peut-être plus juste de commencer par les fractions.

Mais il y a aussi d'autres opinions. Dans les programmes proposés pour la classe de 5^e en France et pour la « Sexta » en Allemagne, ainsi que dans certains manuels hollandais, l'étude des nombres relatifs précède celle des fractions. Les rapporteurs sont d'avis que les nombres négatifs sont à certains égards même plus accessibles que les nombres fractionnaires. Ils ont de multiples rapports avec la réalité (le repérage de la température, de l'altitude, du temps, etc.); on peut les introduire d'une manière toute naturelle, par exemple prolonger la suite des nombres naturels en comptant: 3,2,1,0,-1,-2, Lorsqu'on fait représenter les nombres naturels par des points d'une demi-droite, les élèves eux-mêmes suggèrent souvent de repérer les points symétriques par les mêmes nombres munis de petits signes quelconques.

Dans le rapport hollandais on trouve la remarque suivante. La théorie formelle des nombres rationnels comporte deux procédés abstraits: 1^o introduction des couples de nombres comme objets des opérations, 2^o répartition de ces couples en classes d'équivalence. C'est pourquoi la théorie formelle des nombres rationnels peut être regardée comme étant plus difficile que la

théorie des nombres complexes ou la théorie des classes résiduelles (mod n) par exemple, lorsqu'on n'a qu'une seule de ces abstractions. Par conséquent la théorie formelle des nombres rationnels ne peut être enseignée trop tôt. On pourrait observer que, même à un niveau tout-à-fait élémentaire, on se trouve par rapport aux fractions dans des circonstances semblables, car les nombres introduits sont représentés par des couples de nombres naturels, plusieurs couples représentant le même nombre rationnel. Il est vrai que l'élève prend connaissance de tout cela par des exemples concrets, mais il semble tout de même qu'en matière de fractions la situation soit plus compliquée que dans le cas des nombres négatifs.

Je crois, pour ma part, qu'il faudrait arriver au système des nombres rationnels en deux étapes. Au niveau de la 4^e année on commencerait à traiter les fractions d'une manière « monographique », c.à.d. en introduisant un certain nombre de fractions aux petits dénominateurs en connexion avec la vie quotidienne et à considérer ensuite de simples additions et soustractions, comme $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$. Un peu plus tard on traiterait de même les nombres négatifs en parlant, par exemple, des gains et des pertes. La seconde étape, par exemple à partir de la 6^e année, comprendrait une étude systématique des nombres rationnels. On aurait alors des raisons appréciables pour accepter l'ordre : nombres naturels — nombres entiers, nombres rationnels.

Presque tous les rapporteurs donnent leur opinion sur la manière d'introduire les fractions et les nombres négatifs. Les uns proposent d'envisager en premier lieu le sens concret des notions nouvelles en faisant appel aux exemples des grandeurs opposées ou à la mesure des grandeurs. Les autres préfèrent un point de départ plus algébrique : on a besoin de nombres nouveaux pour que la soustraction ou la division soient toujours possibles ; on présente alors ces nombres comme les différences ou les quotients de nombres naturels ou bien, ce qui revient au même, comme des solutions des équations $a+x = b$, $ax = b$. Il est à remarquer qu'à ce niveau, l'une aussi bien que l'autre de ces explications sont indispensables et qu'elles se complètent mutuellement. Ce n'est que leur ordre qu'on pourrait discuter ; à mon avis c'est plutôt une question de goût pédagogique.

Dans la seconde de ces méthodes on pose un certain problème algébrique, dans la première on donne une interprétation concrète de la solution de ce problème, ce qui pour l'élève joue le rôle d'une preuve de l'existence de la solution — comme le souligne le rapport hollandais. A ce niveau il serait évidemment prématuré de penser aux démonstrations d'existence au sens mathématique par des constructions formelles.

Une autre question est celle-ci: comment motiver les règles des opérations sur les nombres rationnels? On propose souvent d'introduire les opérations en se servant d'une interprétation concrète, de définir par exemple la multiplication par un nombre négatif comme l'extension d'un vecteur suivie d'un changement de direction. En suivant une telle méthode on parvient aisément aux règles des opérations, mais il y a là un défaut: l'élève ne comprend pas bien pourquoi tel ou tel procédé doit être appelé, disons, multiplication. Je crois qu'il vaut mieux établir les règles des opérations en invoquant le principe de la conservation des lois formelles. Les rapporteurs indiquent plusieurs manières d'appliquer cette méthode. Bien entendu, il faut ensuite expliquer le sens concret des opérations pour pouvoir les appliquer en pratique.

Dans les manuels on trouve souvent la remarque que les définitions des opérations sont de pures conventions; en les motivant par les lois fondamentales, on ne les démontre point; ce n'est que leur opportunité qu'on fait voir. Une telle attitude est justement critiquée par un des rapporteurs hollandais: Les conventions en question ne sont point arbitraires et les motivations mentionnées ont un sens mathématique bien déterminé. Elles montrent que les opérations ne peuvent être définies autrement, si l'on veut respecter les lois fondamentales. En d'autres termes, elles présentent pour le problème d'extension du système des nombres les démonstrations d'unicité des solutions. Si l'on doit renoncer à traiter rigoureusement la question d'existence des solutions, leur unicité peut être établie sans difficulté.

L'étude des nombres rationnels fournit l'occasion d'initier les élèves aux structures algébriques fondamentales. Il ne s'agit pas, bien entendu, de traiter les groupes, les anneaux et les corps en général; mais on peut formuler les propriétés de ces

structures en considérant par exemple le groupe multiplicatif des nombres positifs; l'anneau des nombres entiers, le corps de nombres rationnels et peut-être aussi l'anneau des classes résiduelles (mod n) ou le corps des classes résiduelles (mod p). Plus tard on constatera les mêmes propriétés dans les cas des groupes de transformations géométriques élémentaires, de l'anneau des polynômes, du corps des fonctions rationnelles, du corps des nombres réels etc. Au lieu d'insister, par tradition, sur la rationalisation des dénominateurs des fractions, on fera mieux de montrer que certains ensembles, comme celui des nombres $a+b\sqrt{2}$ (a, b — nombres rationnels) sont des corps.

Les fractions décimales sont traitées habituellement comme un cas particulier des fractions ordinaires où l'on se sert d'une notation commode. Le rapporteur allemand est pourtant d'avis qu'aujourd'hui les fractions ordinaires n'ont plus la même importance pratique que jadis, vu qu'on a adopté partout le système métrique des mesures. Il faut donc commencer par les opérations sur les fractions décimales faciles à apprendre et à appliquer. En Autriche une vieille tradition fait enseigner les fractions décimales directement après les nombres naturels. On a accepté la même méthode dans les nouveaux manuels en Suède. Je dois avouer que le procédé qui consiste à enseigner d'abord les fractions décimales ne me semble pas assez justifié. S'il présente quelque avantage pratique, il apporte en même temps une sérieuse complication conceptuelle, car il faut alors étendre le système des nombres une fois de plus.

L'ensemble des fractions décimales fournit un nouvel exemple d'un anneau contenu dans le corps des nombres rationnels. Il jouit de la propriété importante d'être dense dans ce corps, ce qu'on montrera aux élèves en calculant les approximations décimales des nombres rationnels. Cela conduit d'une façon toute naturelle à représenter les nombres rationnels par des fractions périodiques. Pour montrer que toute fraction périodique correspond à un nombre rationnel déterminé, on propose dans quelques rapports le raisonnement suivant: Si $x = 0,333\dots$, on a $10x = 3,333\dots = 3 + x$, donc $x = \frac{1}{3}$. C'est très simple, en effet, mais évidemment ce n'est pas une démonstration suffisante du théorème en question, car on admet ici ce qui est à

démontrer. Je pense qu'il serait mieux de renoncer à cet artifice et de baser la démonstration sur des cas particuliers de division.

c/ Nombres réels. Vers la fin du premier cycle de l'enseignement secondaire, c.a.d. dans la 9^e ou peut-être déjà en 8^e année, les élèves font d'ordinaire leur première connaissance avec les nombres irrationnels. Les rapports ne contiennent que peu d'opinions sur ce sujet. Quelques rapporteurs (Autriche, Italie, Yougoslavie) accentuent l'impossibilité de donner à ce niveau des notions précises sur le système des nombres réels. Il semble que dans la plupart des pays on ne parle de nombres irrationnels qu'en relation avec l'extraction des racines. On montre, par exemple, que l'équation $x^2 = 2$ n'a pas de racines rationnelles, mais que d'autre part la longueur de la diagonale du carré unité doit satisfaire à cette équation. Alors, dit-on, il existe des nombres qui ne sont pas rationnels. On admet d'ordinaire l'arithmétique des nombres réels sans expliquer le sens des opérations sur ces nombres. Ensuite on commence à exercer les élèves à transformer les expressions irrationnelles et à calculer des valeurs approchées des racines carrées au moyen du traditionnel algorithme scolaire. Celui-ci n'est pas très instructif; il serait préférable d'approcher \sqrt{N} par les termes de la suite $a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{N}{a_n} \right)$ comme le propose le rapport français et le SMSG.

Une telle manière de présenter les nombres réels laisse beaucoup à désirer. Je crois que dans la 9^e année de l'enseignement, il est possible de donner aux élèves une meilleure idée du système des réels et qu'une méthode convenable consiste dans l'emploi des fractions décimales non-périodiques pour introduire les nombres irrationnels. C'est ce que proposent les rapporteurs français et polonais et un des rapporteurs hollandais.

Un exposé clair et facile de ce genre se trouve dans le manuel du SMSG pour la 8^e classe. On se borne cependant à y définir les nombres réels et à les représenter par les points d'une droite. Je pense qu'on pourrait aller un peu plus loin et définir aussi les opérations sur les réels en indiquant leurs propriétés fondamentales, ce qu'on peut préparer en considérant d'abord les opérations sur les fractions périodiques.

9. En rédigeant ce rapport j'ai tâché de mettre en lumière les vues des rapporteurs nationaux sur plusieurs problèmes importants relatifs à l'enseignement de l'arithmétique et des éléments d'algèbre. Pourtant il ne m'a pas été possible d'épuiser toutes les questions traitées dans les rapports. Par exemple, ce n'est que d'une façon très incomplète que j'ai tenu compte du riche contenu du rapport hollandais. J'ai dû aussi renoncer à utiliser plusieurs renseignements précieux se trouvant dans les autres rapports. Mais j'espère que tous ces rapports seront imprimés.

Comme je l'ai mentionné au début, l'enseignement scolaire des mathématiques est entré dans une période de progrès dynamique, dont la tendance générale est d'orienter l'enseignement vers la formation des notions mathématiques modernes chez les élèves pour les préparer à comprendre les idées scientifiques contemporaines et leurs applications. Ceci ne veut pas dire qu'on doive négliger l'habileté de calcul, qui n'a point perdu de son importance. Nous croyons, au contraire, qu'en améliorant le côté conceptuel de notre enseignement, nous pourrions par cela même arriver à cette habileté par une voie plus économique. Le rapporteur américain nous informe que, d'après des tests organisés par le Laboratoire National de Minnesota, les élèves qui ont reçu l'enseignement par la méthode du SMSG ne se sont pas montrés moins entraînés aux calculs que ceux qui ont étudié de la manière traditionnelle.

Aujourd'hui nous disposons encore d'un nombre trop restreint d'expériences scolaires pour pouvoir juger de l'effet de nos réformes. Mais avec chaque année, ces expériences vont se multiplier. Je pense qu'il serait bon de les discuter à la prochaine session plénière de la CIEM.

ul. Nowowiejska 22
Warszawa 10

(Reçu le 20 septembre 1962)