

LES SOMMETS D'UNE SURFACE

Autor(en): **Amir-Moéz, Ali R.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **10 (1964)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-39422>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

LES SOMMETS D'UNE SURFACE

par Ali R. AMIR-MOÉZ

Soit $f(x, y, z)$ une fonction réelle des variables réelles x, y, z de classe C'' . Nous employons les matrices pour étudier les sommets de cette fonction.

1. *La quadrique osculatrice.* — Soit $f(x, y, z)$, une fonction réelle des variables réelles x, y , et z , de classe C'' dans le voisinage d'un point (a, b, c) tel que, pour le moins, l'une des premières ou deuxièmes dérivées partielles n'est pas zéro. Donc

$$(1.1) (x - a \ y - b \ z - c \ 1) \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial a^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial a \partial b} & \frac{\partial^2 f}{\partial a \partial c} & \frac{\partial f}{\partial a} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial b \partial a} & \frac{\partial^2 f}{\partial b^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial b \partial c} & \frac{\partial f}{\partial b} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial c \partial a} & \frac{\partial^2 f}{\partial c \partial b} & \frac{\partial^2 f}{\partial c^2} & \frac{\partial f}{\partial c} \\ \frac{\partial f}{\partial a} & \frac{\partial f}{\partial b} & \frac{\partial f}{\partial c} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - a \\ y - b \\ z - c \\ 1 \end{bmatrix} = 0,$$

où, par exemple, $\frac{\partial^2 f}{\partial a \partial b}$ est la valeur de $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ à (a, b, c) , s'appelle la quadrique osculatrice de la surface $f = 0$ à (a, b, c) . On voit que (1.1) est la série de Taylor de la fonction f jusqu'aux termes des deuxièmes degrés autour de (a, b, c) .

Nous appelons la matrice de (1.1) A , et

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial a^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial a \partial b} & \frac{\partial^2 f}{\partial a \partial c} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial b \partial a} & \frac{\partial^2 f}{\partial b^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial b \partial c} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial c \partial a} & \frac{\partial^2 f}{\partial c \partial b} & \frac{\partial^2 f}{\partial c^2} \end{bmatrix}.$$

2. *La Projection sur le plan tangent et le normal.* — La formule

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0,$$

implique que $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$ est le vecteur normal α

$f = 0$ au point (x, y, z) . Nous mettons l'origine sur le point (x, y, z) . Le produit intérieur des vecteurs (x, y, z) et

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}} \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

nous donne la projection du vecteur (x, y, z) sur le normal. La matrice de cette projection est $P = (P_{ij})$, $i, j = 1, 2, 3$ où

$$P_{ij} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j}}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2};$$

ici $x_1 = x$, $x_2 = y$, et $x_3 = z$.

On a donc la projection sur le plan tangent $I - P$, où

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. *Les centres de courvure quadrique.* — Si (1.1) est un carré parfait, nous appelons la surface doublement plate dans le voisinage de (a, b, c) . Supposons que $f = 0$ n'est pas doublement plate dans un voisinage de (a, b, c) . D'après 6 de [1] ou d'après 6 de [2] on obtient les centres par l'équation

$$\xi Q = - \left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right), \quad (3.1)$$

$$\text{où } \xi = (x, y, z) \text{ et } \left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right).$$

L'équation (3.1) est un système des trois équations linéaires des inconnues x, y, z .

Cas où la matrice Q est non-singulière. Ainsi nous avons un unique centre qui sera obtenu par

$$\xi = - \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} \right) Q^{-1},$$

où Q^{-1} est l'inverse de la matrice Q .

Notons que le centre est $\xi + \gamma$, où $\gamma = (a, b, c)$.

II. Si Q est singulière, mais les centres existent, nous considérons le réciproque de Q dénotée aussi par Q^{-1} . Ici $Q^{-1} Q = Q Q^{-1} = E$, où E est la projection sur le rang de Q [3]. Donc, nous écrivons

$$\xi QE = - \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} \right) E.$$

Ainsi

$$\eta = \xi E = - \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} \right) EQ^{-1}.$$

Dans ce cas il y a beaucoup de centres. Mais on choisit le point de cet ensemble qui est le plus proche du point (a, b, c) .

III. Si Q est singulière et (1.1) n'a pas de centre, on dit que la surface n'a pas de centre à (a, b, c) .

4. *La direction de la courvure quadrique.* — Dans les cas I et II de 3 nous appelons les vecteurs ξ et η les directions de la courvure quadrique de $f = 0$ au point (a, b, c) .

Dans le cas III l'équation

$$\eta = \xi E = - \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} \right) EQ^{-1}.$$

nous offre une direction η . Nous l'appelons la direction de la courvure quadrique pour ce cas.

5. *Les sommets d'une surface.* — Si la quadrique osculatrice est tangente à la surface $f(x, y, z) = 0$ par un sommet de la

quadrique, nous appelons ce point de la surface un sommet de la surface.

6. *Théorème.* — Pour qu'un point soit sommet, il est nécessaire et suffisant que

$$PQ = QP,$$

où P et Q sont les matrices décrites dans 1 et 2.

Démonstration: D'après 3 la direction de courvure quadrique est obtenue par

$$\xi Q = - \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} \right).$$

I. Si Q est non-singulière, on a

$$\xi = - \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} \right) Q^{-1}.$$

La projection de ξ sur le plan tangent est zéro, c'est-à-dire,

$$\xi(I-P) = - \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} \right) Q^{-1}(I-P) = 0.$$

Cette équation nous donne

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \xi} \right) Q^{-1} = \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} \right) Q^{-1} P,$$

ou

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \xi} \right) = \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} \right) Q^{-1} P Q.$$

Donc

$$Q^{-1} P Q = P, \quad \text{ou} \quad P Q = Q P.$$

II. Si Q est singulière, nous employons le réciproque Q^{-1} de Q .

Ici

$$\eta = \xi E = - \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} \right) E Q^{-1}.$$

Mais encore la projection du vecteur η sur le plan tangent est zéro, c'est-à-dire

$$-\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)EQ^{-1}(I-P) = 0,$$

ou

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)EQ^{-1} = \left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)EQ^{-1}P.$$

La dernière équation nous donne

$$P = Q^{-1}PQ \quad \text{ou} \quad PQ = QP.$$

7. *Exemple.* — Trouvez les sommets de la surface

$$x^2 + y^2 - z^3 + 1 = 0.$$

Solution:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -3z^2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -6z.$$

Les autres dérivées sont zéro. Donc

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -6z \end{pmatrix},$$

et

$$P = \frac{1}{4x^2 + 4y^2 + 9z^4} \begin{pmatrix} 4x^2 & 4xy & -6xz^2 \\ 4xy & 4y^2 & -6yz^2 \\ -6xz^2 & -6yz^2 & 9z^4 \end{pmatrix}.$$

L'équation $PQ = QP$ nous donne que

$$\begin{pmatrix} 8x^2 & 8xy & -12xz^2 \\ 8xy & 8y^2 & -12yz^2 \\ 36xz^3 & 36yz^3 & -54z^5 \end{pmatrix},$$

doit être symétrique ou hermitique, c'est-à-dire,

$$\begin{cases} -12xz^2 = 36xz^3, \\ -12yz^2 = 36yz^3. \end{cases}$$

Si $x = 0$, $y = 0$, on a $z = 1$. Donc $(0, 0, 1)$ est un sommet. Si $x \neq 0$, $y \neq 0$, on a $z = 0$. Mais $z = 0$ ne donne que des points imaginaires de la surface. Donc la surface a seulement un sommet, c'est-à-dire $(0, 0, 1)$.

8. *Conjecture.* — Soit P un plan contenant le normal de la surface $f = 0$ au point $A = (a, b, c)$; supposons que P rencontre la surface à la courbe K . La courbe K a courbure maximum ou minimum quand A est un sommet de la surface.

BIBLIOGRAPHIE

1. Ali R. AMIR-MOÉZ, Quadric in a unitary Space, *L'Enseignement Mathématique*, tome VII, pp. 250-275 (1961).
2. — A. L. FASS, Quadric in R_n , *Amer. Math. Monthly*, Vol. 67, No. 7, pp. 633-636 (1960).
3. PENSORE, A generalized inverse of Matrices, *Proc. Cambridge Philo. Soc.*, 51, pp. 406-413 (1953).

University of Florida
Gainesville, Florida.

(Reçu le 8 novembre 1962.)