LES SOMMETS D'UNE SURFACE

LES SOMMETS D'UNE SURFACE

par Ali R. AMIR-MOÉZ

Soit $f(x, y, z)$ une fonction réelle des variables réelles x, y, z de classe C''. Nous employons les matrices pour étudier les sommets de cette fonction.

1. *La quadrique osculatrice.* — Soit $f(x, y, z)$, une fonction réelle des variables réelles x, y, et z, de classe C'' dans le voisinage d'un point (a, b, c) tel que, pour le moins, l'une des premières ou deuxièmes dérivées partielles n'est pas zéro. Donc

$$(1.1)\quad (x-a\ \ y-b\ \ z-c\ \ 1)\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial a^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial a\partial b} & \frac{\partial^2 f}{\partial a\partial c} & \frac{\partial f}{\partial a} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial b\partial a} & \frac{\partial^2 f}{\partial b^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial b\partial c} & \frac{\partial f}{\partial b} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial c\partial a} & \frac{\partial^2 f}{\partial c\partial b} & \frac{\partial^2 f}{\partial c^2} & \frac{\partial f}{\partial c} \\ \frac{\partial f}{\partial a} & \frac{\partial f}{\partial b} & \frac{\partial f}{\partial c} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x-a \\ y-b \\ z-c \\ 1 \end{bmatrix} = 0,$$

où, par exemple, $\frac{\partial^2 f}{\partial a\partial b}$ est la valeur de $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ à (a, b, c), s'appelle la quadrique osculatrice de la surface $f = 0$ à (a, b, c). On voit que (1.1) est la série de Taylor de la fonction f jusqu'aux termes des deuxièmes degrés autour de (a, b, c).

Nous appelons la matrice de (1.1) A, et

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial a^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial a\partial b} & \frac{\partial^2 f}{\partial a\partial c} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial b\partial a} & \frac{\partial^2 f}{\partial b^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial b\partial c} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial c\partial a} & \frac{\partial^2 f}{\partial c\partial b} & \frac{\partial^2 f}{\partial c^2} \end{bmatrix}.$$

2. *La Projection sur le plan tangent et le normal.* — La formule

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0,$$

implique que $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$ est le vecteur normal a

$f = 0$ au point (x, y, z). Nous mettons l'origine sur le point (x, y, z). Le produit intérieur des vecteurs (x, y, z) et

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}} \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

nous donne la projection du vecteur (x, y, z) sur le normal. La matrice de cette projection est $P = (P_{ij})$, $i, j = 1, 2, 3$ où

$$P_{ij} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j}}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2};$$

ici $x_1 = x$, $x_2 = y$, et $x_3 = z$.

On a donc la projection sur le plan tangent $I - P$, où

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. *Les centres de curvature quadrique.* — Si (1.1) est un carré parfait, nous appelons la surface doublement plate dans le voisinage de (a, b, c). Supposons que $f = 0$ n'est pas doublement plate dans un voisinage de (a, b, c). D'après 6 de [1] ou d'après 6 de [2] on obtient les centres par l'équation

$$\xi Q = -\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right), \tag{3.1}$$

où $\xi = (x, y, z)$ et $\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$.

L'équation (3.1) est un système des trois équations linéaires des inconnues x, y, z.

Cas où la matrice Q est non-singulière. Ainsi nous avons un unique centre qui sera obtenu par

$$\xi = -\left(\frac{\partial f}{d\xi}\right) Q^{-1} ,$$

où Q^{-1} est l'inverse de la matrice Q.

Notons que le centre est $\xi + \gamma$, où $\gamma = (a, b, c)$.

II. Si Q est singulière, mais les centres existent, nous considérons le réciproque de Q dénotée aussi par Q^{-1}. Ici $Q^{-1} Q = Q$ $Q^{-1} = E$, où E est la projection sur le rang de Q [3]. Donc, nous écrivons

$$\xi Q E = -\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right) E .$$

Ainsi

$$\eta = \xi E = -\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right) E Q^{-1} .$$

Dans ce cas il y a beaucoup de centres. Mais on choisit le point de cet ensemble qui est le plus proche du point (a, b, c).

III. Si Q est singulière et (1.1) n'a pas de centre, on dit que la surface n'a pas de centre à (a, b, c).

4. *La direction de la curvature quadrique.* — Dans les cas I et II de 3 nous appelons les vecteurs ξ et η les directions de la curvature quadrique de $f = 0$ au point (a, b, c).

Dans le cas III l'équation

$$\eta = \xi E = -\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right) E Q^{-1} .$$

nous offre une direction η. Nous l'appelons la direction de la curvature quadrique pour ce cas.

5. *Les sommets d'une surface.* — Si la quadrique osculatrice est tangente à la surface $f(x, y, z) = 0$ par un sommet de la

quadrique, nous appelons ce point de la surface un sommet de la surface.

6. *Théorème.* — Pour qu'un point soit sommet, il est nécessaire et suffisant que

$$PQ = QP,$$

où P et Q sont les matrices décrites dans 1 et 2.

Démonstration: D'après 3 la direction de curvature quadrique est obtenue par

$$\xi Q = -\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right).$$

I. Si Q est non-singulière, on a

$$\xi = -\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right) Q^{-1}.$$

La projection de ξ sur le plan tangent est zéro, c'est-à-dire,

$$\xi (I-P) = -\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right) Q^{-1} (I-P) = 0.$$

Cette équation nous donne

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right) Q^{-1} = \left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right) Q^{-1} P,$$

ou

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right) Q^{-1} PQ.$$

Donc

$$Q^{-1} PQ = P, \qquad \text{ou} \qquad PQ = QP.$$

II. Si Q est singulière, nous employons le réciproque Q^{-1} de Q.

Ici

$$\eta = \xi E = -\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right) E Q^{-1}.$$

Mais encore la projection du vecteur η sur le plan tangent est zéro, c'est-à-dire

$$-\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right) EQ^{-1}(I-P) = 0,$$

ou

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right) EQ^{-1} = \left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right) EQ^{-1} P.$$

La dernière équation nous donne

$$P = Q^{-1} PQ \qquad \text{ou} \qquad PQ = QP.$$

7. *Exemple.* — Trouvez les sommets de la surface

$$x^2 + y^2 - z^3 + 1 = 0.$$

Solution:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y, \ \frac{\partial f}{\partial z} = -3z^2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2, \ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -6z.$$

Les autres dérivées sont zéro. Donc

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -6z \end{pmatrix},$$

et

$$P = \frac{1}{4x^2 + 4y^2 + 9z^4} \begin{pmatrix} 4x^2 & 4xy & -6xz^2 \\ 4xy & 4y^2 & -6yz^2 \\ -6xz^2 & -6yz^2 & 9z^4 \end{pmatrix}.$$

L'équation $PQ = QP$ nous donne que

$$\begin{pmatrix} 8x^2 & 8xy & -12xz^2 \\ 8xy & 8y^2 & -12yz^2 \\ 36xz^3 & 36yz^3 & -54z^5 \end{pmatrix},$$

doit être symétrique ou hermitique, c'est-à-dire,

$$\begin{cases} -12xz^2 = 36xz^3 , \\ -12yz^2 = 36yz^3 . \end{cases}$$

Si $x = 0$, $y = 0$, on a $z = 1$. Donc $(0, 0, 1)$ est un sommet. Si $x \neq 0$, $y \neq 0$, on a $z = 0$. Mais $z = 0$ ne donne que des points imaginaires de la surface. Donc la surface a seulement un sommet, c'est-à-dire $(0, 0, 1)$.

8. *Conjecture.* — Soit P un plan contenant le normal de la surface $f = 0$ au point $A = (a, b, c)$; supposons que P entrecoupe la surface à la courbe K. La courbe K a curvature maximum ou minimum quand A est un sommet de la surface.

BIBLIOGRAPHIE

1. Ali R. Amir-Moéz, Quadric in a unitary Space, *L'Enseignement Mathématique*, tome VII, pp. 250-275 (1961).
2. —— A. L. Fass, Quadric in R_n, *Amer. Math. Monthly*, Vol. 67, No. 7, pp. 633-636 (1960).
3. Pensore, A generalized inverse of Matrices, *Proc. Cambridge Philo. Soc.*, 51, pp. 406-413 (1953).

University of Florida
Gainesville, Florida.

(Reçu le 8 novembre 1962.)