Cinquième Section Une application à la définition des fonctions monogènes

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **10 (1964)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

Enfin, prenons pour $F(x, y, z)$ la fonction:

$$F(x, y, z) = \alpha(x, y)[z - \varphi(x)].$$

La fonction $\alpha(x, y)$ est bornée au voisinage de l'origine, on aura donc $F(x, y, \varphi(x)) = 0$ et en particulier $F(o, o, o) = o$. Cette fonction $F(x, y, z)$ est différentiable à l'ancien sens théorique à l'origine. C'est-à-dire que ses trois dérivées partielles existent à l'origine. En effet:

$$\frac{F(x, o, o) - F(o, o, o)}{x} = \frac{\alpha(x, o)[o - \varphi(x)]}{|x|} = -1.$$

Donc $F'_x(o, o, o)$ existe et est égal à -1.

$$\frac{F(o, y, o) - F(o, o, o)}{y} = \frac{\alpha(o, y)[o - o]}{y} = 0.$$

Donc $F'_y(o, o, o)$ existe et est nul.

Enfin

$$\frac{F(o, o, z) - F(o, o, o)}{z} = \frac{\alpha(o, o)(z - o)}{z} = k.$$

Donc $F'_z(o, o, o)$ existe et est égal à $k \neq 0$. Toutes les conditions du théorème C sont vérifiées au sens ancien de la différentiabilité. A ce même sens, puisque la solution $\varphi(x)$ n'est pas dérivable, la conclusion du théorème (que $\varphi(x)$ est différentiable à l'origine) n'est pas exacte.

Cinquième Section

Une application à la définition des fonctions monogènes

On dit avec Emile Borel qu'une fonction complexe $f(z)$ de la variable complexe $z = x + iy$ est *monogène* au point $c = a + ib$, si cette fonction est dérivable en ce point. C'est-à-dire que

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = f'_c + \varepsilon \text{ avec } \lim_{\Delta z \to 0} \varepsilon = 0.$$

En posant $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$, cherchons à quelles conditions doivent satisfaire P et Q pour que $f(z)$ soit monogène pour $z = c$. Conformément à l'usage en vigueur à son époque, Goursat [1] résoud le problème aux pages 6 à 9 de l'édition de 1905 du tome II de son cours d'analyse, en prouvant d'abord que les fonctions $P(x, y)$, $Q(x, y)$ doivent avoir des dérivées partielles au point considéré et alors en supposant (hypothèses H)

1°) qu'elles en ont encore au voisinage de ce point,

2°) que ces dérivées partielles sont continues au point considéré.

Nous allons voir que la définition moderne de la différentielle *permet de réduire considérablement* cette hypothèse H et même d'obtenir une condition nécessaire et suffisante.

En effet, si $f(z)$ est monogène au point c, on peut écrire

$$\Delta f = (f'_c + \varepsilon)\Delta z \quad \text{ou} \quad \Delta P + i\Delta Q = (A + iB + \varepsilon' + i\varepsilon'')(\Delta x + i\Delta y),$$

d'où

$$\Delta P = (A + \varepsilon')\Delta x - (B + \varepsilon'')\Delta y$$

et

$$\Delta Q = (B + \varepsilon'')\Delta x + (A + \varepsilon')\Delta y$$

avec $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \begin{Bmatrix} \varepsilon' \\ \varepsilon'' \end{Bmatrix} = 0.$

D'après la définition donnée plus haut, page 185, il en résulte que *P et Q sont différentiables au sens moderne au point (a, b)* et que leurs différentielles

$$dP = P'_a dx + P'_b dy$$

$$dQ = Q'_a dx + Q'_b dy$$

sont telles que $P'_a = A$, $P'_b = -B$, $Q'_a = B$, $Q'_b = A$.

Ceci exige que l'on ait:

$$P'_a = Q'_b, \quad P'_b = -Q'_a. \tag{35}$$

Réciproquement si 1°) P et Q sont différentiables au point (a, b), ce qui implique qu'elles ont chacune leurs deux dérivées partielles au point (a, b), 2°) ces dérivées partielles vérifient les conditions (35) dites de Cauchy-Riemann, alors la fonction $f(z)$ sera monogène pour $z = 0$, car on aura:

$$\Delta f = \Delta P + i\Delta Q = (A+\varepsilon')\Delta x - (B+\varepsilon'')\Delta y + i[(B+\varepsilon_1)\Delta x + (A+\varepsilon_2)\Delta y] + (\varepsilon'+i\varepsilon_1)\Delta x + (-\varepsilon''+i\varepsilon_2)\Delta y,$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = A + iB + \eta$$

avec

$$|\eta| = \frac{|(\varepsilon'+i\varepsilon_1)\Delta x + (-\varepsilon''+i\varepsilon_2)\Delta y|}{|\Delta z|} \leqq |\varepsilon'| + |\varepsilon_1| + |\varepsilon''| + |\varepsilon_2|$$

et par suite, $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \eta = 0$, c'est-à-dire que $f(z)$ est dérivable pour $z = c$.

En résumé: Pour que la fonction $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ soit *monogène* pour $z = c = a + ib$, il faut et il suffit:

1°) que P et Q soient différentiables au sens moderne au point (a, b),

2°) que, ces fonctions ayant alors nécessairement des dérivées partielles au point (a, b), celles-ci vérifient les conditions de Cauchy-Riemann

$$P'_a = Q'_b, \quad P'_b = -Q'_a.$$

Remarque: Nous avons établi ce théorème en 1919 [17]. Quelques années plus tard, Mrs. Chisholm Young l'a indépendamment redécouvert et l'a appelé « Théorème fondamental de la théorie des fonctions complexes ».

Sixième Section

Différentielles successives.
Dérivées partielles du second ordre.

Avant de nous occuper des différentielles, disons quelques mots des dérivées partielles. On a longtemps admis implicitement que si f''_{xy} et f''_{yx} existent, elles sont égales. Pourtant leurs