LES POINTS DE VUE EXTRÊMES SUR L'ENSEIGNEMENT DE LA GÉOMÉTRIE

Autor(en): **Artin, E.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **9 (1963)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-38768

LES POINTS DE VUE EXTRÊMES SUR L'ENSEIGNEMENT DE LA GÉOMÉTRIE

par E. ARTIN †, Hamburg

Je n'ai pas l'intention de parler longuement. Je pense que nous devons discuter les rapports et ne pas écouter de trop longs discours qui ne peuvent que répéter ce qui est contenu dans ces rapports. Néanmoins, il peut être utile de préciser les différents points de vue possibles sur le sujet.

Tous les maîtres sont à peu près d'accord sur l'enseignement élémentaire de la géométrie, depuis les écoles maternelles jusqu'aux deux ou trois dernières années des écoles secondaires. L'enseignement doit y être intuitif et ne peut utiliser les méthodes axiomatiques. Mais ces classes doivent préparer les élèves à une présentation unifiée de la géométrie; les démonstrations doivent devenir de plus en plus rigoureuses; à la fin de cette préparation, l'élève doit sentir qu'il ne reste plus qu'à formuler les hypothèses essentielles, ou axiomes, pour compléter l'édifice d'une science merveilleuse. Beaucoup de suggestions excellentes dans ce sens se trouvent dans les rapports.

Mais des difficultés importantes et des divergences fondamentales se présentent sur la façon de poursuivre l'enseignement dans les classes supérieures.

Je voudrais d'abord déterminer les limites de l'ensemble convexe de toutes les opinions possibles sur la question. Il y a trois opinions extrêmes et l'ensemble convexe est un triangle, en dépit des opinions de DIEUDONNÉ.

La première possibilité est la méthode la plus commode pour les maîtres des écoles secondaires. Elle consiste à ignorer les difficultés concernant les axiomes d'Euclide et à prétendre que les démonstrations classiques sont entièrement rigoureuses. On ne peut nier que cette méthode est impressionnante pour les élèves. N'oublions pas que c'est la méthode qui nous a été enseignée à l'école; elle a peut-être influencé notre désir d'étudier les mathématiques. Elle nous a initiés à la notion de démonstration et nous a proposé une science d'apparence parfaite. En raison de l'expérience de notre enfance, nous hésitons à abandonner cette méthode. Toute autre solution devrait conserver ces avantages.

Un autre point de vue extrême est d'incorporer à l'enseignement de la géométrie les axiomes d'HILBERT ou des axiomes équivalents. Nous savons aujourd'hui que tout système d'axiomes de la géométrie est une description du groupe des déplacements; l'étude de ce groupe conduit à la démonstration d'un isomorphisme entre le plan euclidien et le plan cartésien. Cette démonstration est extrêmement longue et compliquée et a sa place dans les cours d'Université. A l'école, on devrait définir le plan cartésien comme plan sur le corps des nombres réels. Donc le système d'axiomes sera formel; l'objet déterminé par les axiomes sera unique à un isomorphisme près; il n'y aura pas moyen d'utiliser les résultats ainsi obtenus dans les autres disciplines mathématiques. Je doute qu'on puisse enseigner ces démonstrations à des élèves d'une école secondaire. Ils ne comprendront probablement pas pourquoi on s'efforce de démontrer d'une manière pénible et pédante ce qui leur semble évident.

La troisième possibilité extrême est d'abandonner toute présentation axiomatique de la géométrie. Après avoir introduit la notion de coordonnées dans les cours préparatoires (d'une manière plus ou moins intuitive), on peut définir l'espace cartésien comme espace vectoriel de dimension deux muni d'une forme bilinéaire définie. Ces notions ont été rencontrées par l'élève en algèbre de façon rigoureuse. Nous en reparlerons plus tard. Pour les élèves, il y aura pourtant une difficulté. Pourquoi introduire un espace tellement abstrait, quand l'espace naturel est à notre disposition et possède toutes les propriétés désirables? Une première réponse à cette question est qu'il n'en est pas ainsi. D'après les expériences physiques, l'espace naturel n'a aucune de ces propriétés. Il n'existe pas de points, ni de lignes; il n'est pas possible de localiser les objets de façon exacte; si on se contente d'une notion vague pour les points et les droites, l'espace n'est pas euclidien. Une autre réponse, beaucoup plus difficile à comprendre, est la suivante: Même si l'espace naturel possédait toutes les propriétés de l'espace cartésien, il serait nécessaire de ne pas l'utiliser pour préserver la pureté de notre science. C'est une question philosophique qui ne sera pas comprise aisément. Après tout, la plupart des mathématiciens du siècle passé n'avaient aucune idée sur la vraie nature de notre science.

Il y a encore d'autres difficultés. La démonstration de beaucoup de théorèmes géométriques est assez simple dans le plan cartésien, mais l'introduction de la notion d'angle exige des raisonnements subtils. On en parle d'ailleurs dans les rapports de Royaumont et de Dubrovnik.

L'enseignement moderne de l'algèbre utilise la géométrie puisque l'espace vectoriel est indispensable à l'étude de l'algèbre linéaire. L'introduction de cet espace en algèbre simplifie toutes les démonstrations, les rend intuitives et tout à fait rigoureuses.

Ce troisième point de vue n'exclut pas toute axiomatique. Mais il propose de limiter l'usage de l'axiomatique à l'algèbre. Les notions de groupe, de corps, d'espace vectoriel ne peuvent être introduites que par une description axiomatique. Mais ces axiomes peuvent être utilisés facilement et l'élève n'aura que peu de difficultés d'assimilation. D'autre part, ces axiomes ne sont pas arbitraires et sont aussi utilisés dans d'autres domaines mathématiques. Un autre avantage de ce point de vue est qu'il conduit à la notion d'espace de dimension arbitraire et qu'il procure à l'élève des notions qui lui seront utiles pendant toutes ses études universitaires.

A Dubrovnik, il y avait une section pour l'enseignement de l'algèbre et une section pour l'enseignement de la géométrie. Ces sections ont travaillé indépendamment, mais se sont communiqué constamment leurs résultats. J'ai participé moi-même aux deux sections et j'ai discuté avec tous leurs membres. Naturellement, le travail de la section géométrique a été le plus difficile et il faut se réjouir qu'il ait abouti à une proposition aussi concrète que celle du rapport. La section algébrique était favorable au troisième point de vue; la section géométrique était proche de ce même point de vue, mais a cru devoir maintenir une partie des méthodes axiomatiques. Personne ne soutenait une méthode purement axiomatique. Je préfère, moi-même, le troisième point de vue.

Enfin, il faut discuter une question pratique. Le nombre des disciplines mathématiques dont on a demandé l'introduction dans les écoles secondaires a augmenté. Le rapport propose l'introduction d'éléments de probabilités et de statistique. En Italie, dans le pays des grandes traditions géométriques, on propose un programme contenant des éléments de géométrie projective, de géométrie algébrique et beaucoup de géométrie analytique. En France, aux Etats-Unis, en Allemagne, on demande de développer l'algèbre et l'analyse. Il semble que tous oublient que l'enseignement des écoles secondaires est bien différent de l'enseignement universitaire. Ce qui est enseigné à l'université en une heure seulement demande plusieurs semaines dans les écoles secondaires. Il est donc impossible de satisfaire toutes ces demandes. En Allemagne, la situation est encore pire. Il y a trois espèces de gymnasium: le gymnasium des langues classiques, le gymnasium des langues modernes et celui des sciences naturelles. On abandonne l'enseignement mathématique pendant la dernière année de scolarité, sauf au gymnasium des sciences naturelles. Dans ces conditions, où trouver le temps d'enseigner une axiomatique de la géométrie? On peut seulement présenter une axiomatique mixte, en partie algébrique, en partie géométrique. De cette façon, l'élève aura appris quelque chose qui ne lui sera plus utile ultérieurement, même s'il veut étudier les fondements de la géométrie dont les méthodes sont complètement différentes.

Mon point de vue est donc de limiter l'axiomatique à l'algèbre où elle est féconde. Rien de la fascination de la géométrie d'Euclide ne sera perdu, sauf la prétention à une rigueur axiomatique. Les théorèmes d'Euclide auront leur place dans les cours préparatoires et le temps gagné pourra être employé, pendant la dernière année, à une étude approfondie de la géométrie. Les élèves seront familiarisés avec ceux des espaces qu'ils utiliseront constamment au cours de leurs études universitaires.