

Chapitre II Sur le problème des isopérimètres

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **9 (1963)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

CHAPITRE II

Sur le problème des isopérimètres

On a vu, dans l'article précédemment reproduit, que, lorsqu'on n'admet pas a priori l'existence de l'extremum de $Y = f(X)$ cherché, il faut que le procédé employé conduise à la construction de l'élément extrémal X ainsi que cela s'est produit dans notre première méthode, ou que, comme dans les deux autres méthodes, il fasse soupçonner quel est cet élément extrémal; il convient alors de terminer par une vérification. Dans cet article, l'élément X était un point. Lorsque X est une courbe qui n'est à priori donnée ni de forme ni de grandeur, il faudra presque toujours construire la courbe extrémale. C'est ce que nous allons faire pour le problème des isopérimètres qui s'énonce ainsi: quelle est, de toutes les courbes planes fermées, de même longueur, celle qui enferme la plus grande aire, ou encore quel est de tous les domaines plans de même aire celui qui a le plus petit périmètre? ¹⁾

Le problème des isopérimètres peut, comme l'on sait, être ainsi posé: tracer un domaine pour lequel le rapport $\frac{L^2}{S}$, du carré du périmètre à l'aire du domaine, soit le plus petit possible. C'est sous cette forme que je l'envisagerai.

J'admets démontré, ce qui est facile, que la solution de ce problème ne peut être donnée que par un domaine convexe. Le contour convexe qui limite un tel domaine, étant supposé parcouru dans le sens direct, admet parallèlement à toute direction une et une seule tangente dirigée, en entendant par tangente au contour une droite qui a des points communs avec le contour,

¹⁾ Le texte qui suit est paru sous le titre: Sur les problèmes des isopérimètres et sur les domaines de largeur constantes, dans les *Comptes rendus des séances de la Société mathématique de France*, 1914, p. 72.

mais aucun point intérieur au domaine. Un contour convexe est défini par l'ensemble de ses tangentes, ou, ce qui revient au même, par un ensemble dénombrable de tangentes correspondant à des directions denses dans tout angle. Si l'on compte les directions à partir d'une origine quelconque, et si α désigne un arc incommensurable avec π , toutes les tangentes parallèles aux directions $m\alpha$, où m est entier, suffiraient à déterminer le contour. Les directions $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ étant choisies pour les tangentes, chacune des tangentes correspondantes dépend d'un paramètre, par exemple sa distance à un point fixe. Le problème des isopérimètres, problème du calcul des variations, est remplacé par un problème de minimum pour une fonction de ces paramètres en nombre infini. C'est là une transformation purement formelle et très banale, mais elle mérite cependant d'être signalée parce que, ici, on peut raisonner sur les paramètres comme s'ils étaient indépendants. Je veux dire que l'on peut déterminer chaque paramètre par la condition que le rapport $\frac{L^2}{S}$ considéré comme fonction de ce paramètre, supposé seul variable, soit minimum.

Soit C un contour convexe solution du problème des isopérimètres. Un tel contour, à supposer qu'il existe, n'est déterminé qu'à une similitude près; mais peu importe, raisonnons sur un contour C déterminé. Soient $T_1, T_2, T_3, \dots$ les tangentes à ce contour de directions $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$

Considérons le polygone Π_p convexe limité par les tangentes dirigées $T_1, T_2, T_3, \dots T_p$. Je suppose ce polygone fini, c'est-à-dire ne s'étendant pas à l'infini, ce qui est vrai dès que $p = 3$ si $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sont bien choisis. Le polygone Π_p admet p côtés ou du moins, s'il admet moins de p côtés et s'il n'admet pas, par exemple, de côté porté par T_k , c'est que T_k passe par un de ses sommets et que ce sommet est un point de C , sans quoi T_k ne serait pas tangente à C . On peut donc toujours dire que Π_p a p côtés, à condition, peut-être, de considérer des côtés infiniment petits. Ceci va se préciser de suite: passons de Π_p à Π_{p+1} en coupant Π_p par T_{p+1} ; on sait à l'avance que les côtés de Π_p qui seront coupés par T_{p+1} sont ceux qui, dans la rose des directions, comprennent la direction α_{p+1} . Soient AB, AC ces deux côtés, qui sont finis ou infiniment petits, peu importe; la tangente T_{p+1}

coupe certainement AB entre A et B et AC entre A et C , mais elle peut passer par A , par B ou par C . Dans tous les cas, pour passer de Π_p à Π_{p+1} , on enlève de Π_p un triangle et non un polygone plus compliqué; c'est la remarque essentielle.

Ce triangle, enlevé pour passer de Π_p à Π_{p+1} , est de grandeur inconnue, mais il est connu à une homothétie près. Si L_p et S_p sont la longueur et l'aire de Π_p et si l'on coupe Π_p par une parallèle à T_{p+1} qui passe entre A et B et entre A et C , on remplace Π_p par Π_{p+1} et L_p et S_p respectivement par $L_p - kl$, $S_p - k^2s$, l et s étant des nombres qu'on peut calculer dès que $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{p+1}$ sont donnés. Par suite $\frac{(L_{p+1})^2}{S_{p+1}}$ est au moins égal au minimum de $\frac{(L_p - kl)^2}{S_p - k^2s}$; cherchons ce minimum. On l'obtient pour:

$$\frac{2l}{L_p - kl} = \frac{2ks}{S_p - k^2s}$$

ou

$$\frac{L_p - kl}{S_p - k^2s} = \frac{kl}{k^2s} = \frac{L_p}{S_p} \quad (1)$$

et ce minimum est

$$\frac{(L_p - kl)^2}{S_p - k^2s} = \frac{L_p}{S_p} [L_p - kl] = \frac{L_p^2}{S_p} \left[1 - \frac{l}{s} \frac{S_p}{L_p} \frac{l}{L_p} \right] = \frac{L_p^2}{S_p} - \frac{l^2}{s} \quad (2)$$

Ainsi, quand on passe de Π_p à Π_{p+1} , on gagne au plus $\frac{l^2}{s} = \varepsilon_p$, quantité connue à l'avance et ne dépendant que de $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p+1}$; et l'on ne gagne cette quantité que si l'égalité (1) est vérifiée par la tangente T_p . Cette égalité s'interprète géométriquement d'une façon très simple: $\frac{2S_p}{L_p}$ est le rayon d'un cercle inscrit dans un polygone de longueur L_p et d'aire S_p ; $\frac{2k^2s}{kl}$ est le rayon du cercle exinscrit dans le triangle enlevé pour passer de Π_p à Π_{p+1} et inscrit dans l'angle A de ce triangle, c'est-à-dire dans celui des angles de Π_p dont le sommet n'est pas sommet de Π_{p+1} .

Si donc Π_p est un polygone circonscriptible et si l'on gagne $\frac{L^2}{S} = \varepsilon_p$ en passant de Π_p à Π_{p+1} , Π_{p+1} est circonscrit au même cercle que Π_p .

Ceci étant, et supposant, comme précédemment, que $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, soient choisis de manière que Π_3 soit un triangle, soit m le rapport $\frac{L^2}{S}$ pour ce triangle; m est connu, puisque le triangle est connu à une homothétie près. Le rapport $\frac{L^2}{S}$ pour Π_{p+1} sera au moins

$$m - \varepsilon_3 - \varepsilon_4 - \dots - \varepsilon_p$$

et il ne sera égal à cette quantité que si la condition (1) est constamment remplie, c'est-à-dire si $\Pi_4, \Pi_5, \dots, \Pi_{p+1}$ sont circonscrits au cercle inscrit dans Π_3 . Si cette condition n'était pas remplie par Π_{k+1} ayant été remplie par $\Pi_4, \Pi_5, \dots, \Pi_k$, $\frac{L^2}{S}$ serait au moins

$$m - \varepsilon_3 - \varepsilon_4 - \dots - \varepsilon_{k-1} - \varepsilon_{k+1} - \dots - \varepsilon_p - \eta$$

avec $\eta < \varepsilon_k$. Et ce « manque à gagner » $\varepsilon_k - \eta$ ne pourrait jamais être rattrapé dans la suite.

$\frac{L^2}{S}$ pour le contour C étant la limite du rapport correspondant pour les polygones Π_m , on voit que le cas où C est un cercle est une solution du problème des isopérimètres et que c'est la seule solution.

Chemin faisant, nous avons vu que le minimum de $\frac{L^2}{S}$ pour un polygone dont les côtés ont des directions données est toujours fourni par un polygone circonscriptible. Signalons encore une quantité de curieuses expressions, savoir toutes celles qui résultent de la formule

$$4\pi = m - \varepsilon_3 - \varepsilon_4 - \varepsilon_5 - \dots;$$

inutile de les expliciter ici.¹⁾

¹⁾ La suite de la communication est relative aux domaines de largeur constante; il en sera question plus loin (voir p. 247, note 3).

Dans un livre auquel auront avantage à se reporter tous ceux qui s'intéressent au problème des isopérimètres et aux questions analogues: *Sur le problème des isopérimètres et le problème des isépiphanes* (collection des monographies sur la théorie des fonctions, Gauthier-Villars, 1930), M. T. Bonnessen a dit que la démonstration précédente était la seule démonstration élémentaire qu'il connaissait avant d'avoir construit les siennes. Elle est facile à suivre et, en ce sens, mérite bien, je crois, le qualificatif d'élémentaire. Mais, si l'on se reporte à la signification donnée au mot géométrie élémentaire par les Grecs et si l'on cherche ce qui caractérise les procédés de cette géométrie, on sera conduit, je pense, à noter en premier lieu l'absence de considérations sur l'infini. Ce n'est pas qu'à y regarder de près, on ne rencontre la notion d'infini à chaque pas puisque les êtres mêmes sur lesquels on raisonne, point, droite, etc..., sont conçus comme résultant d'une suite indéfinie de simplifications faites sur des objets du monde réel; les considérations du troisième livre sur les rapports, ainsi que celles sur les aires et volumes, introduisent bien aussi des passages à la limite, donc des considérations de suite infinie. Pourtant là encore l'infini n'intervient que pour arriver aux notions premières, aux définitions, on évite son emploi dans les raisonnements. A cet égard, la démonstration qui vient d'être donnée n'est pas élémentaire: on y construit la circonférence extrémale à l'aide d'une suite infinie de ses tangentes. L'emploi de l'infini dans les problèmes d'extremum est pour ainsi dire de règle; aucune de ces questions n'est vraiment élémentaire.

Prenons par exemple le problème simple suivant:

de tous les quadrilatères ABCD ayant quatre côtés de longueur donnée a, b, c, d, quel est celui de plus grande aire?

L'aire a pour expression

$$\frac{1}{2} ad \sin A + \frac{1}{2} bc \sin C. \quad (1)$$

Les angles A et C sont liés par la relation

$$a^2 + d^2 - 2ad \cos A = b^2 + c^2 - 2bc \cos C. \quad (2)$$

La méthode des dérivées donne alors

$$\frac{\frac{1}{2}ad \cos A}{2ad \sin A} = \frac{\frac{1}{2}bc \cos C}{-2bc \sin C}$$

d'où

$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} C = 0$$

Le maximum de l'aire ne peut donc être atteint que pour un quadrilatère inscriptible. Mais il faudra s'assurer qu'il existe un tel quadrilatère et qu'il donne effectivement le maximum. Ce dernier point conduira au calcul de la dérivée seconde. Faisons-le immédiatement: en considérant C comme fonction de A , la dérivation des relations (2) et (1) donne

$$C' = \frac{ad \sin A}{bc \sin C},$$

$$2S' = ad \cos A + bc \cos C \cdot C'$$

$$= \frac{ad}{\sin C} (\cos A \sin C + \sin A \cos C)$$

$$= ad \frac{\sin (A + C)}{\sin C}.$$

$$2S'' = \frac{ad}{\sin^2 C} [\cos (A + C) \sin C (1 + C') - \sin (A + C) \cos C \cdot C']$$

$$= \frac{ad}{\sin^2 C} \left[\cos (A + C) \sin C - \frac{ad \sin^2 A}{bc \sin C} \right].$$

Donc, pour $A + C = \Pi$, S'' est négatif, ce sera bien un maximum que l'on obtiendra. Quant à l'existence d'un quadrilatère inscrip-

tible de côtés a, b, c, d , elle résultera de l'existence des racines de l'équation

$$a^2 + d^2 - 2ad \cos A = b^2 + c^2 + 2bc \cos A. \quad (3)$$

Les conditions de possibilité s'obtiendront en écrivant que la valeur de $\cos A$ tirée de cette équation n'est pas extérieure à l'intervalle $-1, +1$. On verra facilement que ces conditions sont vérifiées si chacune des quatre longueurs est plus petite que la somme des trois autres, donc dans le cas que nous considérons où, avec les longueurs de ces côtés, on peut construire un quadrilatère.

Les considérations sur l'infini sont tout entières cachées à la fin de l'étude précédente, au moment où nous utilisons, sans le dire explicitement, ce théorème de Weierstrass: une fonction continue d'une ou plusieurs variables considérée dans un domaine borné y atteint sa borne inférieure, sa borne supérieure et toutes les valeurs comprises entre ces deux bornes. C'est seulement grâce à ce théorème que nous avons pu conclure à l'existence du quadrilatère dès que nous avons été assurés que l'équation (3) donne pour $\cos A$ une valeur non extérieure à l'intervalle $-1, +1$. Or ce théorème de Weierstrass se démontre et ne peut être démontré que grâce à la considération de l'infini.

Je rappelle qu'on utilise généralement ce qu'on appelle le théorème de Bolzano-Weierstrass, savoir: tout ensemble infini de points distincts ou confondus et situés dans un domaine borné admet au moins un point-limite. On peut le démontrer ainsi: partageons le domaine en un nombre fini de domaines partiels; l'un d'eux contiendra nécessairement une infinité de points. Partageons de nouveau celui-ci en une infinité de domaines partiels; parmi ces nouveaux domaines, l'un contiendra nécessairement une infinité de points, etc... En prenant convenablement ces subdivisions, on aura une suite infinie de domaines emboîtés les uns dans les autres et tels qu'il n'existe qu'un seul point P intérieur à tous. Il est clair que, dans tout voisinage de P , il y aura une infinité de points distincts ou confondus de l'ensemble primitif. Donc P est l'un de ces points-limites dont il s'agissait de prouver l'existence.

Puisque les raisonnements d'aspect élémentaire sont aussi bien que les autres basés sur la considération de l'infini, utilisons franchement de telles considérations, et reprenons par exemple le problème du quadrilatère.

Considérons une suite infinie de quadrilatères Q_1, Q_2 , etc... ayant les côtés donnés a, b, c, d et dont les aires tendent vers la borne supérieure. Plaçons tous ces quadrilatères de façon, par exemple, qu'ils aient les côtés AB confondus. Nous aurons une infinité de positions distinctes ou confondues de C , d'où au moins un point-limite C_0 pour ces points C . Choisissons dans la famille des quadrilatères $Q_1, Q_2, \dots$ une suite partielle $Q'_1, Q'_2 \dots$ pour lesquels les points C tendent vers C_0 . Les sommets D de ces quadrilatères ont au moins un point-limite D_0 . Prenons enfin une suite $Q''_1, Q''_2 \dots$ tels que C et D tendent vers C_0 et D_0 . Il est clair que le quadrilatère ABC_0D_0 a les côtés donnés et qu'il a pour aire la borne supérieure de l'aire. Ainsi, sans utiliser les dérivées, nous venons de démontrer l'existence d'un quadrilatère extrémal et de prouver que le maximum de l'aire est atteint. Si maintenant nous appliquons au quadrilatère trouvé ABC_0D_0 la méthode des dérivées, il nous suffira de reprendre le commencement du calcul fait précédemment pour être certain que ce quadrilatère extrémal est inscriptible.

Si on nous avait donné n longueurs $a, b, c, d, \dots l$, pour les côtés successifs d'un polygone et qu'on nous ait demandé de rechercher s'il existe un polygone donnant le maximum de l'aire, nous aurions démontré l'existence du polygone extrémal et prouvé que le maximum de l'aire est atteint exactement de la même manière. Sachant alors qu'il existe un polygone extrémal donnant le maximum, prenons quatre des sommets de ce polygone, soient M, N, P, Q . Je dis que $MNPQ$ est inscriptible. En effet s'il ne l'était pas et si $mnpq$ était le quadrilatère inscriptible de mêmes côtés, l'aire de $mnpq$ serait supérieure à celle de $MNPQ$. Transportons les arcs du périmètre du polygone extrémal Π sous-tendus par les diagonales MN, NP, PQ, QM , de manière que leurs extrémités viennent en mn, np, pq, qm . Le nouveau polygone obtenu serait d'aire plus grande que celle de Π et aurait les mêmes côtés; ce qui est absurde. Donc $MNPQ$ est inscriptible. Il est vrai que j'ai admis que le nouveau polygone

formé avait un contour qui ne se recoupait pas lui-même, de sorte que ce que l'on doit appeler son aire apparaît clairement. Mais s'il se recoupait lui-même ou s'il était concave, en effectuant un certain nombre de fois l'opération qui consiste à remplacer deux côtés consécutifs JK , KL par leurs symétriques par rapport à JL , on le rendrait convexe et l'aire de ce polygone convexe serait plus grande que celle de Π . Ainsi le problème consistant à trouver un polygone de côtés donnés et d'aire maximum a une solution sous la seule condition qu'avec les longueurs données on puisse effectivement construire un polygone, et le polygone-solution est inscriptible.

Pour achever l'étude de ce problème, il reste seulement à montrer que le polygone est bien déterminé par ce qui a été trouvé, c'est-à-dire qu'il n'existe qu'un polygone convexe inscriptible ayant les côtés successifs de longueurs a , b , c , ..., l .

Nous déterminerons le rayon du cercle circonscrit à un tel polygone par l'équation

$$\varphi_a + \varphi_b + \dots + \varphi_l = \pi, \quad (4)$$

dans laquelle les φ sont les moitiés des angles sous lesquels les côtés sont vus du centre, ce qui donne des relations telles que

$$2R \sin \varphi_a = a.$$

Il faudra, ou prendre tous les φ aigus (centre à l'intérieur du polygone) ce qui donnera l'équation (4'), ou prendre l'angle sous lequel on voit le plus grand côté obtus et les autres aigus, ce qui donnera l'équation (4''). $2R$ est au moins égal aux plus grandes longueurs données, soit la longueur a . Substituons dans les premiers membres de (4') et (4'') une valeur R que nous ferons croître

de $\frac{a}{2}$ à ∞ . Alors le premier membre de (4') décroît constamment jusqu'à zéro, (4') ne peut donc donner qu'une solution et en donne une si la valeur de départ est au moins égale à π ; cela arrive en particulier si plusieurs longueurs données sont égales

à a , car alors, au départ, plusieurs φ sont égaux à $\frac{\pi}{2}$. Le premier membre de (4'') part de la même valeur que celui de (4'), mais pour $R = \infty$, il atteint la valeur π . Il l'atteint d'ailleurs en décroissant car la dérivée par rapport à R de ce premier membre est $\sum \varphi'_i$, avec $\varphi'_i = -\frac{i}{2R^2 \cos \varphi_i}$. C'est donc $-\frac{1}{2R^2} \sum \frac{i}{\cos \varphi_i}$. Pour $R = \infty$ la somme $\sum$ se réduit à $a+b+\dots+l$, quantité positive, donc la dérivée du premier membre de 4'' est négative. Pour une valeur de R annulant cette dérivée, la dérivée seconde est

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2R^2} \sum \frac{i \sin \varphi_i}{\cos^2 \varphi_i} \varphi'_i &= \frac{1}{4R^4} \sum \frac{i^2 \sin \varphi_i}{\cos^3 \varphi_i} = \frac{1}{8R^5} \sum \frac{i^3}{\cos^3 \varphi_i} \\ &= \frac{1}{8R^5} \left[\left(\frac{a}{\cos \varphi_a} \right)^3 + \left(\frac{b}{\cos \varphi_b} \right)^3 + \dots + \left(\frac{l}{\cos \varphi_l} \right)^3 \right] \\ &= \frac{1}{8R^5} \left\{ - \left[\frac{b}{\cos \varphi_b} + \dots + \frac{l}{\cos \varphi_l} \right]^3 + \right. \\ &\quad \left. \left[\left(\frac{b}{\cos \varphi_b} \right)^3 + \dots + \left(\frac{l}{\cos \varphi_l} \right)^3 \right] \right\} < 0; \end{aligned}$$

le premier membre de (4'') ne peut donc pas avoir de minimum et par suite il a au plus un maximum. Ceci étant, quand on fait varier R de $\frac{a}{2}$ à ∞ , le premier membre de (4'') part, si (4') a donné une solution, d'une valeur au moins égale à π pour finir avec la valeur π et (4'') ne donne pas de solution; si (4') n'a pas donné de solution, le premier membre de (4'') part d'une valeur inférieure à π pour décroître à la fin vers la valeur π , donc dans ce cas (4'') donne une solution et une seule.

Ainsi, si $a, b, c, \dots, l$, sont les côtés successifs d'un polygone plan, il existe un polygone inscriptible de côtés successifs $a, b, c, \dots, l$ et c'est lui qui, de tous les polygones admettant des côtés ayant les mêmes longueurs et dans le même ordre, donne le maximum de l'aire. Le même polygone donnerait d'ailleurs aussi le maximum de l'aire si l'ordre des côtés n'était pas imposé; on obtient

en effet tous les ordres différents par la répétition de la permutation de deux longueurs consécutives. Or, le remplacement des côtés PQ et QR du polygone inscriptible convexe relatif au premier ordre considéré, par exemple, par leurs symétriques relativement à la médiatrice de PR , donne un polygone inscriptible convexe sans modification de l'aire et sans que soit changée la valeur du rayon du cercle circonscrit; ce qui explique que, dans l'équation (4), l'ordre des longueurs données n'intervient pas.

Il est facile de démontrer à partir de là le théorème des isopérimètres: *tout domaine plan $\mathcal{D}$ de périmètre L et non circulaire a une aire A inférieure à l'aire $\frac{L^2}{4\pi}$ du domaine circulaire de même périmètre.*

En effet, on peut inscrire dans le contour de $\mathcal{D}$ un quadrilatère $ABCD$ non inscriptible dans une circonférence. Si, sans changer les longueurs des côtés de $ABCD$, on rendait ce quadrilatère inscriptible, son aire subirait un accroissement, un gain g . Tout polygone plan Π ayant quatre sommets suffisamment voisins de $ABCD$ éprouverait, si on le rendait inscriptible sans changement des côtés, un gain d'aire au moins égal à $\frac{g}{2}$. Choisissons Π comme il suit: prenons d'abord un polygone Π_0 inscrit dans le contour de $\mathcal{D}$ et d'aire supérieure à $A - \frac{g}{2}$; puis modifions Π_0 de manière à satisfaire à ces trois conditions évidemment compatibles:

1° son aire est supérieure à $A - \frac{g}{2}$;

2° ses côtés sont au plus égaux à ceux de Π_0 et ont une partie aliquote commune;

3° le nouveau polygone est un polygone Π .

En partageant, grâce à la partie aliquote commune, les côtés de Π en segments égaux, si n est le nombre total de ces segments,

l'aire de Π est au plus égale à $\frac{1}{2} nR^2 \sin \frac{2\pi}{n}$

$$\text{avec } 2nR \sin \frac{\pi}{n} < L.$$

Donc on a

$$A - \frac{g}{2} \leq n \sin \frac{\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n} \left(\frac{L}{2n \sin \frac{\pi}{n}} \right)^2 = \frac{L^2}{4n \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}} < \frac{L^2}{4\pi},$$

ce qui démontre le théorème.

On vient en somme de compléter certains modes de démonstration du théorème des isopérimètres. On pourrait les compléter tous de façon analogue, sans modifier en réalité leur simplicité, mais en faisant un usage non masqué de considérations sur l'infini.

Comment ces considérations, qui viennent de nous servir pour l'étude des polygones, peuvent-elles être caractérisées? Ce qui frappe, c'est qu'elles donnent, sans recourir aux équations qui proviendraient de la méthode des dérivées, l'existence de l'élément extrémal; c'est seulement ensuite que les équations interviennent pour déterminer l'élément extrémal dont l'existence est déjà acquise. C'est le fait analogue qui caractérise ce qu'on appelle la méthode directe du calcul des variations, aussi *j'appellerai méthode directe tout traitement d'un problème d'extremum dans lequel l'existence de l'élément extrémal sera prouvée tout d'abord, la détermination de cet élément ne venant qu'après*. On voit que ce qualificatif direct se justifie parfaitement à un certain point de vue, bien qu'à un autre, comme on l'a dit au début, il ne convient guère.

Il y a des cas où le recours à la méthode directe semble obligatoire. Soit à trouver le maximum de $y = x^2 - 2x + 3$ dans l'intervalle $(-2, +2)$; la dérivée seconde étant toujours positive, ce maximum ne peut être obtenu par la méthode des dérivées; mais la méthode directe — qui se réduit ici à la démonstration du théorème de Weierstrass — montre cependant l'existence de l'élément extrémal. Celui-ci ne pouvant être obtenu par la méthode des dérivées est nécessairement l'une des extrémités de l'intervalle; c'est -2 et le maximum est 11.

Soit encore à trouver le minimum de l'aire d'un quadrilatère dont les côtés successifs ont pour longueurs a, b, c, d , telles,

naturellement, que de pareils quadrilatères existent. Les calculs de dérivation que nous avons faits montrent que l'élément extrémal ne peut être obtenu par ces calculs et cependant les considérations qui nous ont servi pour l'étude du maximum de l'aire nous donneraient encore une figure ABC_0D_0 limite de quadrilatères ayant les côtés voulus et dont les aires tendent vers la borne inférieure des aires. Puisque le calcul des dérivées ne peut être appliqué à cette figure ABC_0D_0 , c'est que l'angle A par exemple ne peut varier dans les deux sens, en croissant et en décroissant, à partir de la valeur qu'il a dans ABC_0D_0 . Ceci exige donc que, pour l'une de ces variations, la figure cesse d'appartenir à la famille de nos quadrilatères; en d'autres termes deux côtés de ABC_0D_0 doivent se recouvrir partiellement. L'élément extrémal ABC_0D_0 est donc à la frontière, peut-on dire, de la famille de quadrilatères considérés et ce n'est plus un véritable quadrilatère; l'aire qu'on est conduit à attribuer à ABC_0D_0 est celle d'un triangle ayant pour côtés deux des longueurs consécutives données et pour troisième côté la différence des deux autres longueurs.

Les problèmes justiciables de la méthode des dérivées et de son analogue dans le calcul des variations sont dits *réguliers*. Tous les autres sont dits *irréguliers*; ceux-ci sont bien entendu de natures très variées; il arrive que, pour eux, l'élément extrémal n'appartienne plus à la famille d'éléments considérés, mais soit seulement à la frontière de cette famille; c'est déjà ce que nous avons rencontré dans la recherche de la courbe joignant A à B , ayant en A une tangente déterminée, et de longueur minimum.