

# Chapitre premier Sur une question de minimum

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **9 (1963)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## CHAPITRE PREMIER

### Sur une question de minimum<sup>1)</sup>

1. Il s'agit de cette question connue:  $A, B, C$  étant trois points donnés,  $P$  un point variable du plan  $ABC$ , quel est le minimum de la somme  $PA + PB + PC$  ?

Je me propose de résoudre cette question par des méthodes élémentaires, sans faire d'hypothèses sur l'existence d'une position pour laquelle le minimum est atteint, et sans recourir ni à la théorie des coniques ni à des considérations de géométrie de situation.

Dans une suite d'exercices de sa *Géométrie élémentaire* (voir en particulier ex. 363) M. Hadamard a donné une méthode conduisant au but que je me propose. Bien entendu, sa méthode n'est pas sans parenté avec celles qui suivent. Des différentes démonstrations proposées, le lecteur en déduira facilement de nouvelles.

Les premiers paragraphes contiennent des propositions accessoires qui simplifieront l'exposition, mais qu'il n'est pas nécessaire de traiter à part comme je le fais.

2. Parcourons le périmètre du triangle dans le sens  $ABC$ ; nous fixons ainsi un sens de rotation qui sera dit le sens direct.

Si par  $A$  on mène une droite quelconque  $D$  et par  $B$  une droite  $\Delta$  rencontrant  $D$  en un point  $P$  et telle qu'il faille faire tourner  $D$  de  $\frac{2\pi}{3}$  dans le sens direct autour du point  $P$  pour l'amener sur  $\Delta$ , le lieu de  $P$  quand  $D$  tourne autour de  $A$ , est la circonférence capable de  $\frac{2\pi}{3}$  décrite sur  $AB$ .

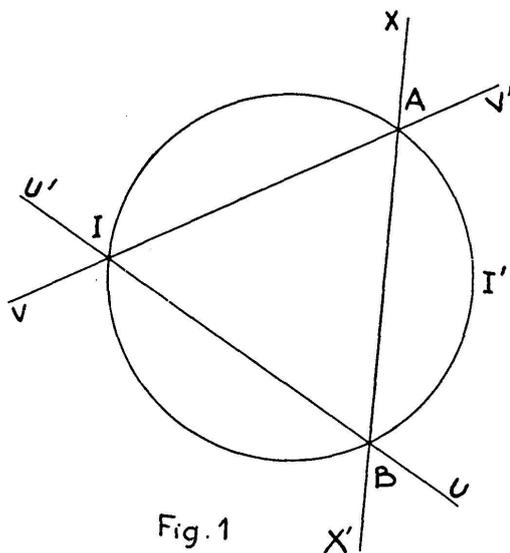
---

<sup>1)</sup> Le texte qui suit est paru sous le titre: Sur une question de minimum, dans la *Revue de l'Enseignement des Sciences*, 12<sup>e</sup> année, janvier-février 1918, p. 1.

Si, au contraire,  $\Delta$  se déduisait de  $D$  par une rotation de  $\frac{2\pi}{3}$  dans le sens inverse, le lieu de  $P$  serait la circonférence capable de  $-\frac{2\pi}{3}$  décrite sur  $AB$ .

Les trois circonférences capables de  $+\frac{2\pi}{3}$  décrites respectivement sur  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$  se coupent en un point  $M$ , et de même les trois circonférences capables de  $-\frac{2\pi}{3}$  se coupent en un point  $M_1$ . En effet, si  $M$ , par exemple, est le point commun aux deux premières, on passe de la droite  $MA$  à la droite  $MB$  par une rotation  $+\frac{2\pi}{3}$ ; on passe de  $MB$  à  $MC$  par une rotation  $+\frac{2\pi}{3}$ ; donc on passe de  $MC$  à  $MA$  par la rotation

$$+ 2\pi - \frac{2\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} = + \frac{2\pi}{3}.$$



Soit  $AIBI'$  (fig. 1) la circonférence capable de  $+\frac{2\pi}{3}$  décrite par  $P$ . Nous allons chercher dans quelles conditions le point  $M$  est intérieur au triangle  $ABC$ . Le sens de rotation direct des angles  $+\frac{2\pi}{3}$  est le sens  $AIB$ . Ce sens doit être le même que le sens  $ABC$ ; donc le point  $C$  est dans le demi-plan limité par  $AB$

et qui contient  $I'$ . La droite  $MC$  forme avec  $MA$  et  $MB$  des angles égaux en valeur absolue à  $\frac{\pi}{3}$  et qui sont inscrits dans notre

circonférence; donc  $MC$  passe par  $I$ , milieu du grand arc  $AB$ . Les droites  $IA$ ,  $IB$  et l'arc  $AI'B$  divisent le demi-plan considéré en quatre régions. Si  $C$  est dans  $X'BU$  ou  $V'AX$ , le point  $M$ , qui est sur  $IC$ , est sur l'arc  $AI$  ou  $BI$ , donc est extérieur à  $ABC$ .

Si  $C$  est dans  $UBI'AV'$ ,  $M$  est sur  $AI'B$  et entre  $C$  et le point de rencontre avec  $AB$ ; donc il est intérieur à  $ABC$ .

Si  $C$  est dans le segment  $AI'B$ ,  $M$  est encore sur  $AI'B$ , mais pas entre  $C$  et le point de rencontre avec  $AB$ ; donc il est encore extérieur à  $ABC$ .

Or, quand  $C$  est dans  $V'AX$ , l'angle  $A$  surpasse  $\frac{2\pi}{3}$ ; quand  $C$  est dans  $X'BU$ , l'angle  $B$  surpasse  $\frac{2\pi}{3}$ ; quand  $C$  est dans le segment  $AI'B$ , l'angle  $C$  surpasse  $\frac{2\pi}{3}$ ; quand  $C$  est dans  $V'AI'BU$ , tous les angles du triangle sont inférieurs à  $\frac{2\pi}{3}$ .

Donc  $M$  est intérieur au triangle  $ABC$  si tous ses angles sont inférieurs à  $\frac{2\pi}{3}$ .

Supposons maintenant que la circonférence  $AIBI'$  soit capable de  $-\frac{2\pi}{3}$  et cherchons dans quelles conditions  $M_1$  est sur l'arc  $AI'B$  que nous appellerons  $\Gamma$ . Cette fois,  $C$  est dans le demi-plan limité par  $AB$  et qui contient  $I$ .

$M_1$  étant sur  $CI$ , il faut que  $C$  soit dans  $AIB$  ou  $U'IV$ . Dans le premier cas, les deux angles  $A$  et  $B$  sont tous deux plus petits que  $\frac{\pi}{3}$ ; dans le second, ils sont tous deux plus grands; pour toutes les autres positions de  $C$ , l'un de ces angles est plus grand que  $\frac{\pi}{3}$  et l'autre plus petit.

Si  $\Theta$  est un triangle d'angles  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , on démontrera de même que les trois circonférences capables de  $+(\pi-\alpha)$ ,  $+(\pi-\beta)$ ,

$+(\pi-\gamma)$ , ou de  $-(\pi-\alpha)$ ,  $-(\pi-\beta)$ ,  $-(\pi-\gamma)$ , décrites sur  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$  concourent en un point  $M$  ou  $M_1$ . Dans les considérations précédentes, le triangle équilatéral  $ABI$  sera remplacé par un triangle semblable à  $\Theta$  pour lequel :

$$\widehat{ABI} = \beta, \widehat{BIA} = \gamma, \widehat{IAB} = \alpha$$

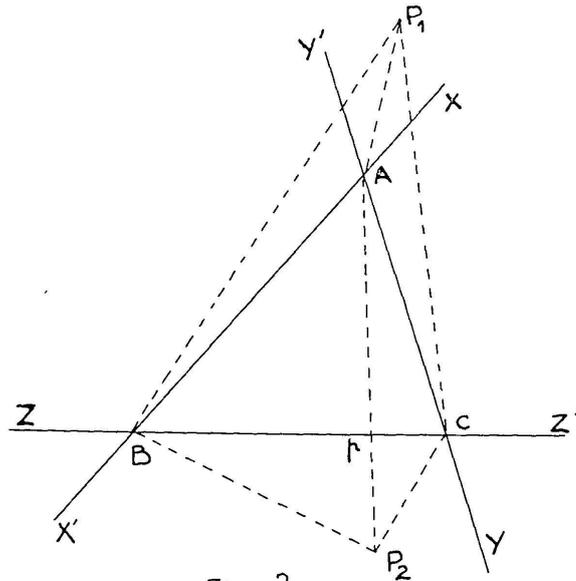


Fig. 2

Donc,  $M$  sera intérieur à  $ABC$  si l'on a

$$A < \pi - \alpha, B < \pi - \beta, C < \pi - \gamma$$

$M_1$  sera sur l'arc  $\Gamma$  si l'on a

soit  $A < \alpha$  et  $B < \beta$

soit  $A > \alpha$  et  $B > \beta$

3. Pour la recherche du minimum de  $PA+PB+PC$ , on peut se borner aux points  $P$  intérieurs à  $ABC$  ou situés sur le contour de  $ABC$ . Je les appellerai: les points de  $ABC$ .

En effet, soit un point  $P$  qui ne soit pas point de  $ABC$ . Nous allons lui faire correspondre un point de  $ABC$  donnant une somme plus petite que  $PA+PB+PC$ .

Si  $P$  est en  $P_1$  dans  $XAY'$  (fig. 2), on a

$$P_1B + P_1C > AB + AC,$$

donc

$$P_1A + P_1B + P_1C > AA + AB + AC,$$

et l'on peut faire correspondre  $A$  à  $P_1$ .

Si  $P$  est en  $P_2$  dans  $X'BCY$ , on peut lui faire correspondre  $p$ , point de rencontre de  $AP_2$  et de  $BC$ , car

$$P_2B + P_2C > pB + pC,$$

donc

$$P_2A + P_2B + P_2C > pA + pB + pC.$$

Tous les cas sont ainsi examinés.

La même conclusion subsiste et le raisonnement convient aussi pour le cas de la somme  $aPA + bPB + cPC$ ,  $a, b, c$  étant trois constantes positives données. Pour la somme  $aPA + bPB - cPC$ , il suffirait de s'occuper des points de la région  $Y'ABZ$ ; démontrons seulement qu'on peut se limiter au demi-plan  $\Pi$  limité par  $AB$  et ne contenant pas  $C$ . Soient en effet  $P_1$  et  $P_2$  deux points symétriques par rapport à  $AB$ ,  $P_1$  étant dans  $\Pi$ ; il est évident que l'on a

$$\begin{aligned} aP_1A + bP_1B - cP_1C &= aP_2A + bP_2B - cP_1C \\ &< aP_2A + bP_2B - cP_2C \end{aligned}$$

I

4. Soit  $\hat{A} \leq \hat{B} \leq \hat{C}$  (fig. 3).

Faisons tourner  $ABC$  de  $+\frac{\pi}{3}$  autour de  $C$ ; il vient en  $A'B'C$ .

Un point  $P$ , intérieur à  $ABC$ , vient en  $P'$ . Le triangle  $PCP'$ , isocèle car  $PC = PC'$ , et dont l'angle  $C$  vaut  $+\frac{\pi}{3}$ , est équilatéral.

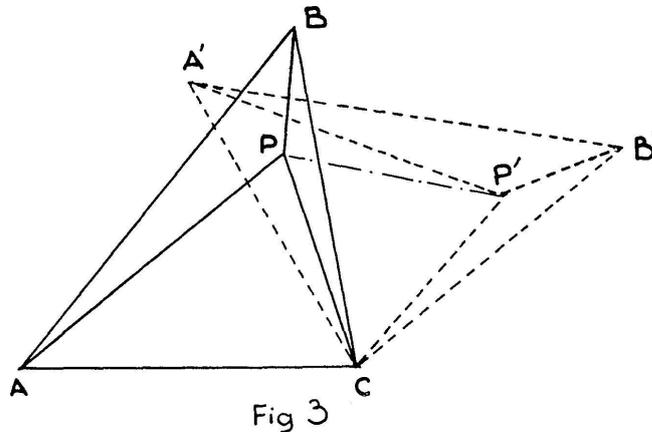
Donc

$$PA + PB + PC = AP + PP' + P'B'$$

Un mobile, se déplaçant sur  $APP'B'$  de  $A$  vers  $B'$ , tourne autour de  $C$  d'abord de l'angle  $ACP$  qui est dans le sens direct,

puis de  $+\frac{\pi}{3}$ , puis de  $P'CB' = PCB$  de sens direct; donc il tourne au total de  $ACB + \frac{\pi}{3}$ .

Si donc l'angle  $\widehat{C}$  du triangle surpasse  $\frac{2\pi}{3}$ , la ligne  $APP'B'$  est enveloppante pour la ligne  $ACB'$  dont l'angle  $\widehat{ACB'}$  est plus grand que  $\pi$ . Le minimum est alors obtenu quand  $P$  est en  $C$ . Ce minimum est la somme des deux plus petits côtés du triangle, car  $AB$  opposé au plus grand angle  $C$  est le plus grand côté de ce triangle.



Si  $\widehat{C}$ , et par suite aussi  $\widehat{A}$  et  $\widehat{B}$ , est inférieur ou égal à  $\frac{2\pi}{3}$ , il existe un point  $M$  de  $ABC$  tel que les droites  $MA$ ;  $MB$ ,  $MC$  fassent entre elles des angles de  $+\frac{2\pi}{3}$ . Si  $P$  vient en  $M$ , on a

$$\begin{aligned} \widehat{APC} &= \frac{2\pi}{3} & \widehat{CPP'} &= \frac{\pi}{3} \\ \widehat{CP'B'} &= \widehat{CPB} = \frac{2\pi}{3} & \widehat{PP'C} &= \frac{\pi}{3}; \end{aligned}$$

donc  $A, P, P', B$  sont en ligne droite: la position  $M$  de  $P$  donne le minimum et il est évident que c'est la seule position le donnant.

Ce minimum est égal à

$$AB' = \sqrt{AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cos\left(C + \frac{\pi}{3}\right)}.$$

Le fait que  $\widehat{C}$  est le plus grand des angles nous a été commode pour la distinction des deux cas, mais il n'intervient pas dans la seconde partie du raisonnement; dans l'expression ci-dessus du minimum, on peut donc effectuer une permutation circulaire sur les côtés et les angles du triangle.

5. M. Montel m'a fait remarquer que la démonstration s'applique à la somme

$$aPA + bPB + cPC.$$

Ecartons le cas banal où l'un des  $a, b, c$ , serait nul, et supposons d'abord qu'il existe un triangle  $\Theta$  dont les côtés ont pour longueurs  $a, b, c$ . Soient  $\alpha, \beta, \gamma$  les angles de ce triangle.

Supposons que l'on ait

$$A + \alpha \leq B + \beta \leq C + \gamma$$

et faisons tourner  $ABC$  de l'angle  $\gamma$  autour de  $C$ ; puis effectuons l'homothétie de centre  $C$  et de rapport  $\frac{b}{a}$  qui donne le triangle  $A'B'C$ ;  $P$ , intérieur à  $ABC$ , vient en  $P'$ . On a

$$P'B' = PB \times \frac{b}{a} \quad P'C = PC \times \frac{b}{a}.$$

Le triangle  $PCP'$ , dont l'angle  $\widehat{PCP'}$  est égal à  $\gamma$ , est donc semblable à  $\Theta$  et

$$PP' = PC \times \frac{c}{a}$$

Donc on a

$$AP + PP' + P'B' = \frac{aPA + bPB + cPC}{a}$$

La démonstration se poursuit comme précédemment. Le minimum est donné par  $C$  si  $C + \gamma \geq \pi$ . Le minimum est donné par le point  $M$  commun aux trois circonférences capables de  $+(\pi - \alpha)$ ,  $+(\pi - \beta)$ ,  $+(\pi - \gamma)$  décrites respectivement sur  $BC, CA, AB$ , si

$$A + \alpha < \pi, \quad B + \beta < \pi, \quad C + \gamma < \pi.$$

Supposons ensuite qu'il n'existe pas de triangle  $\ominus$ . Soit, par exemple,  $c > a + b$ . On peut trouver  $c_1$  vérifiant  $c_1 > a$ ,  $c_1 > b$ ,  $c_1 < a + b$  et tel que le triangle de côtés  $a$ ,  $b$ ,  $c_1$  ait un angle  $\gamma_1$  opposé à  $c_1$  assez grand pour que  $C + \gamma_1$  dépasse  $\pi$ . Alors on a, quel que soit  $P$  différent de  $C$ ,

$$aPA + bPB + c_1PC > aCA + bCB,$$

donc, *a fortiori*, puisque  $c_1$  est plus petit que  $c$ ,

$$aPA + bPB + cPC > aCA + bCB$$

et le minimum est donné par la position  $C$  de  $P$ .

## II

6. Soient  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  des points pris sur  $MA$ ,  $MB$ ,  $MC$  entre  $M$  et  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $P$  un point différent de  $M$ . On a

$$PA \leq PA_1 + AA_1, \quad PB \leq PB_1 + BB_1, \quad PC \leq PC_1 + CC_1,$$

les trois signes  $=$  ne convenant pas à la fois. En ajoutant, on a

$$PA + PB + PC < PA_1 + PB_1 + PC_1 + (AA_1 + BB_1 + CC_1).$$

Si donc on a

$$PA_1 + PB_1 + PC_1 \leq MA_1 + MB_1 + MC_1$$

en ajoutant  $AA_1 + BB_1 + CC_1$  aux deux membres, on en tire :

$$PA + PB + PC < MA + MB + MC.$$

Donc, si  $M$  donne le minimum pour  $PA + PB + PC$ , il donne aussi le minimum pour  $PA_1 + PB_1 + PC_1$ . Et puisque, quels que soient  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{C}$ , sur les demi-droites  $MA$ ,  $MB$ ,  $MC$ , une homothétie de centre  $M$  permet de remplacer  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{C}$ , par  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  entre  $M$  et  $A$ ,  $M$  et  $B$ ,  $M$  et  $C$ , le point  $M$  donne aussi le minimum pour la somme  $P\mathcal{A} + P\mathcal{B} + P\mathcal{C}$ .

La recherche d'une position donnant le minimum est donc la recherche d'une certaine configuration de trois demi-droites

$MA, MB, MC$ , mais ne dépend pas de la position des points  $A, B, C$ .

Cette remarque, qui fait pressentir le rôle du point  $M$  du § 2, permet d'arriver tout de suite au résultat si l'on admet l'existence d'une position  $P$  donnant le minimum. Pour rester tout à fait dans le domaine élémentaire, notons la conclusion sous la forme suivante.

Si l'on a

$$PA + PB + PC > MA + MB + MC,$$

on peut remplacer dans cette inégalité les points  $A, B, C$  par d'autres situés sur  $MA, MB, MC$  entre  $M$  et  $A, M$  et  $B, M$  et  $C$ , ou par des points situés sur  $PA, PB, PC$ , au-delà de  $A, B, C$ . En d'autres termes, on peut allonger les longueurs du membre le plus grand ou diminuer celles du plus petit.

7. Supposons que  $ABC$  soit un triangle équilatéral;  $M$  est le point de rencontre de ses hauteurs. Soit  $P$  un point différent de  $M$ . Je dis que l'on a

$$PA + PB + PC > MA + MB + MC.$$

En effet, soient  $P_1, P_2$  les deux points déduits de  $P$  par des rotations de  $\pm \frac{2\pi}{3}$  autour de  $M$ .  $M$  est le point de rencontre des médianes du triangle  $PP_1P_2$ ; donc la somme géométrique de  $AP, AP_1, AP_2$  est d'après une proposition connue égale à  $3 AM$ . Cette somme géométrique a une longueur inférieure à  $AP + AP_1 + AP_2$ ; donc on a

$$\begin{aligned} PA + PB + PC &= \frac{AP + AP_1 + AP_2}{3} + \frac{BP + BP_1 + BP_2}{3} \\ &+ \frac{CP + CP_1 + CP_2}{3} > AM + BM + CM \end{aligned}$$

Ainsi le point  $M$  donne bien le minimum pour le cas du triangle équilatéral.

Supposons que  $ABC$  n'ait aucun angle supérieur à  $\frac{2\pi}{3}$ .

D'après le § 2, il existe un point  $M$  tel que les trois demi-droites  $MA$ ,  $MB$ ,  $MC$  fassent entre elles des angles égaux à  $\frac{2\pi}{3}$  <sup>1)</sup>.

Sur ces trois demi-droites, prenons, au-delà de  $A$ ,  $B$ ,  $C$  trois points  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{C}$ , à la même distance de  $M$ .  $M$  donne le minimum pour le triangle  $\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C}$ , donc aussi pour  $ABC$ .

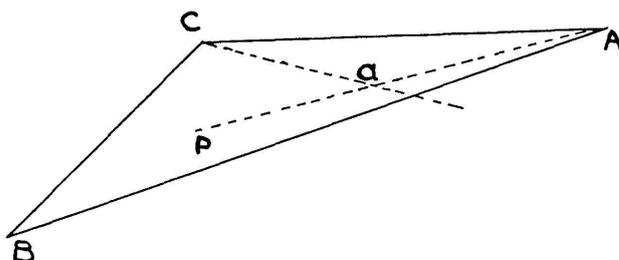


Fig 4

Supposons que  $ABC$  ait un angle supérieur à  $\frac{2\pi}{3}$ , soit l'angle  $C$ . Je dis que  $C$  donne le minimum, donc, que, quel que soit le point  $P$ , on n'a pas

$$PA + PB + PC < CA + CB.$$

L'un des deux angles  $\widehat{BCP}$  ou  $\widehat{PCA}$  est inférieur à  $\frac{2\pi}{3}$ , soit  $\widehat{BCP}$  (fig. 4). Traçons la droite  $Ca$  faisant  $+\frac{2\pi}{3}$  avec  $CB$ ; elle coupe  $PA$  en  $a$ . Si l'inégalité précédente était vraie, on pourrait y remplacer  $A$  par  $a$ . Or cela est impossible, puisque  $C$  donne le minimum pour le triangle  $aBC$ .

### III

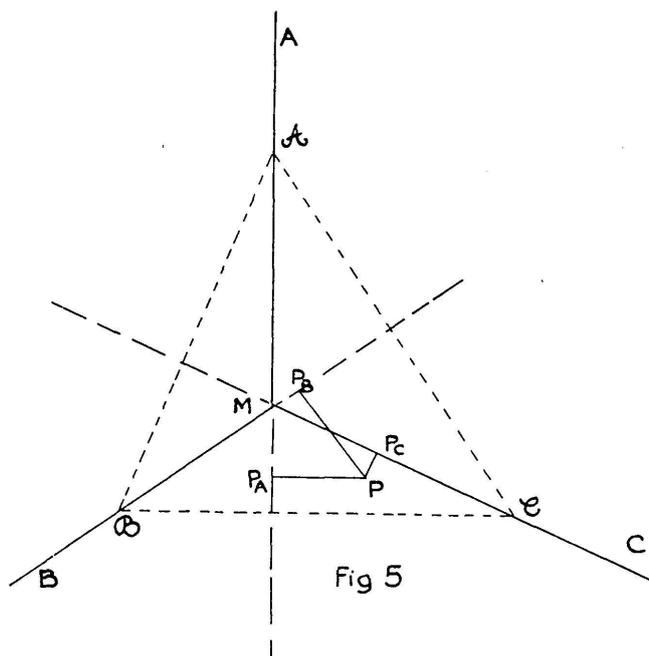
8. Les raisonnements du § 6 s'appliquent tout de suite au cas de la somme  $aPA + bPB + cPC$ ; mais il n'en est pas de même du raisonnement du début du § 7. On peut, dans le cas général, raisonner comme il suit.

1) Si  $C = \frac{2\pi}{3}$ ,  $M$  est en  $C$ ; la demi-droite  $MC$  est alors définie par la condition de faire l'angle  $+\frac{2\pi}{3}$  avec  $MB$ .

Plaçons-nous dans le cas où il existe un triangle  $\Theta$  et où  $A + \alpha, B + \beta, C + \gamma$  sont inférieurs à  $\pi$ . Il existe alors, dans  $ABC$ , un point  $M$  d'où l'on voit  $BC, CA, AB$  sous des angles  $\pi - \alpha, \pi - \beta, \pi - \gamma$  (§ 2). Je dis que ce point donne le minimum. Soit  $P$  un point différent de  $M$ . L'hypothèse

$$aPA + bPB + cPC \leq aMA + bMB + cMC$$

va nous conduire à une contradiction.



Soient (fig. 5)  $P_A, P_B, P_C$  les projections de  $P$  sur  $AM, BM, CM$  et convenons de compter positivement  $AP_A, BP_B, CP_C$  respectivement dans les sens  $AM, BM, CM$ . On a

$$AP \geq AP_A;$$

inégalité dans laquelle le premier membre est positif et le second de signe quelconque, ou

$$AM - AP \leq AM - AP_A = P_A M.$$

Les trois inégalités analogues ne peuvent se réduire simultanément à des égalités. En les ajoutant, on a

$$0 \leq a(AM - AP) + b(BM - BP) + c(CM - CP)$$

$$< aP_A M + bP_B M + cP_C M.$$

Or, soit  $\theta$  un triangle  $\mathcal{ABC}$  ayant pour hauteurs les droites  $MA$ ,  $MB$ ,  $MC$ .  $\theta$  est évidemment semblable à  $\Theta$ ; donc ses côtés sont proportionnels à  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . En représentant par  $M_a$ ,  $M_b$ ,  $M_c$ ,  $P_a$ ,  $P_b$ ,  $P_c$  les distances de  $M$  et  $P$  aux côtés de ce triangle, distances comptées dans des sens tels qu'elles soient positives pour des points intérieurs à  $\theta$ , on a, comme l'on sait

$$aM_a + bM_b + cM_c = aP_a + bP_b + cP_c,$$

ou encore

$$a(P_a - M_a) + b(P_b - M_b) + c(P_c - M_c) = 0$$

Or, au signe près peut-être, car la position de  $\theta$  n'a pas été précisée, le premier membre est égal à  $aP_A M + bP_B M + cP_C M$ , d'où la contradiction annoncée.

Le premier cas étant ainsi traité, pour achever l'examen des trois cas possibles, on imitera la fin du § 7, puis celle du § 5.

#### IV

9. Je vais examiner rapidement le cas de la somme  $aPA + bPB - cPC$ , en supposant toutefois  $c < a + b$ , sans quoi le minimum serait  $-\infty$  comme on le voit en prenant  $P$  de plus en plus loin.

Soit  $P$  un point du demi-plan  $\Pi$  limité par  $AB$  et ne contenant pas  $C$  (§ 3). Soit  $Q$  la position du point  $K$  donnant le minimum de  $aKA + bKB + cKC$ . On a

$$aPA + bPB > aQA + bQB + cQP,$$

d'où

$$\begin{aligned} aQA + bQB - cQC &< aPA + bPB - c(QP + QC) \\ &< aPA + bPB - cPC. \end{aligned}$$

Or,  $Q$  est en  $A$  si  $A \geq \pi - \alpha$ , ou si  $a \geq b + c$ , en  $B$  si  $B \geq \pi - \beta$ , ou si  $b \geq a + c$ , en  $C$  si  $C \geq \pi - \gamma$ , et si aucune de ces conditions n'est réalisée, il se trouve sur l'arc  $\Gamma$  de la circonférence capable de  $-(\pi - \gamma)$  décrite sur  $AB$  qui se trouve dans  $\Pi$ .

Donc, la question est résolue pour  $a \geq b+c$ , ou  $b \geq a+c$ , et, dans le cas où il existe un triangle  $\theta$ , il suffit de s'occuper des points  $P$  du demi-plan  $\Pi$  qui sont compris entre  $AB$  et  $\Gamma$ .

Soient  $P$  un de ces points,  $Q$  le point de rencontre de  $CP$  prolongé et de  $\Gamma$ .  $Q$  donne le minimum de la somme  $aKA+bKB+cKQ$ , puisque l'angle  $AQB$  est égal à  $\pi-\alpha$ . Donc

$$\begin{aligned} aQA+bQB &< aPA+bPB+cPQ, \\ aQA+bQB-cQC &< aPA+bPB-c(QC-PQ) \\ &< aPA+bPB-cPC. \end{aligned}$$

Donc il suffit de s'occuper du cas où  $P$  serait en  $A$ , en  $B$  ou sur  $\Gamma$ .

10. Supposons  $A = \alpha$ ,  $B = \beta$ ,  $C = \gamma$  et  $P$  sur  $\Gamma$  qui est maintenant un arc de la circonférence circonscrite à  $ABC$ . Le théorème de Ptolémée donne :

$$PC \cdot AB = PA \cdot BC + PB \cdot AC,$$

ou puisque  $AB, BC, CA$  sont proportionnels à  $a, b, c$ ,

$$cPC = aPA + bPB.$$

Le minimum est donc 0; il est atteint pour tous les points de  $\Gamma$ .

11. La conclusion énoncée à la fin du § 6 s'applique sans changement à la somme  $aPA+bPB-cPC$  pour ce qui est de la substitution d'autres points aux points  $A$  et  $B$ ; mais, pour ce qui est de  $C$ , la conclusion est naturellement inverse: on peut remplacer  $C$  par un point situé sur  $MC$  au-delà de  $C$  ou par un point situé sur  $PC$  entre  $P$  et  $C$ .

Ceci étant, soit  $A > \alpha$ ,  $B > \beta$ . Alors  $C$  est dans  $U'IV$  (fig. 1). Il existe sur  $AI'B$  un point  $M_1$  intersection de  $\Gamma$  et de  $CI$ . C'est ce point  $M_1$  qui donne le minimum, car  $M_1$  donne le minimum quand on remplace  $C$  par  $I$ .

Soient maintenant  $C$  intérieur à la circonférence ( $\Gamma$ ) qui porte l'arc  $\Gamma$  (donc  $C > \gamma$ ) et  $P$  un point de  $\Gamma$  (fig. 6). Si  $P$  ne fournissait pas une somme  $aPA+bPB-cPC$  supérieure à celles que donneraient les points  $A$  ou  $B$ , il en serait de même si l'on rem-

plaçait  $C$  par le point d'intersection  $\mathcal{C}$  de  $PC$  et de  $(\Gamma)$ . Or, soit  $Q$  un point de  $\Gamma$ ; on a

$$cQI = aQA + bQB$$

et

$$aQA + bQB - cQ\mathcal{C} = c(QI - Q\mathcal{C})$$

Sur  $QI$  portons  $QJ = Q\mathcal{C}$ . L'angle  $\mathcal{C}JI$  étant constant, le lieu de  $J$  est une circonférence  $(\lambda)$  passant par  $\mathcal{C}$  et  $I$ , et comme  $J$  est en  $I$  quand  $Q$  est situé en  $Q_1$ , sur la perpendiculaire au milieu de  $\mathcal{C}I$  et du même côté que  $A$  et  $B$  par rapport à  $\mathcal{C}I$ ,  $Q_1I$  est la tangente à  $(\lambda)$ ;  $(\lambda)$  a donc pour centre le milieu  $Q_2$  de celui des arcs  $\mathcal{C}I$  qui ne contient pas  $A$  et  $B$ .

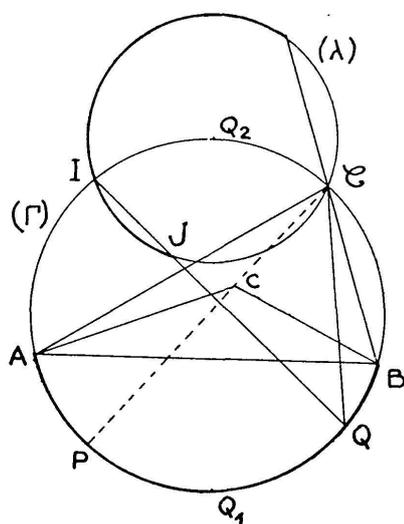


Fig. 6

Il résulte de là que, quand  $Q$  parcourt  $\Gamma$ , l'arc de  $(\lambda)$  parcouru par  $J$  ne contient pas le point diamétralement opposé à  $I$ , puisque  $Q$  ne prend pas la position  $Q_2$ ; le minimum de la différence positive ou négative

$$JI = QI - Q\mathcal{C}$$

donc de  $aQA + bQB - cQ\mathcal{C}$ , est par suite obtenu pour l'une des deux positions extrêmes  $A$  ou  $B$  du point  $Q$ .

Donc, pour  $C \geq \gamma$ , le minimum est donné par l'un des sommets  $A$  ou  $B$ .

Maintenant, si  $A$  donne le minimum pour une position de  $C$ , il donne *a fortiori* le minimum si l'on éloigne  $C$  de  $A$  sur la droite  $AC$ ; donc tous les cas sont traités.

Le seul cas où le minimum n'est donné ni par  $A$ , ni par  $B$  est celui où l'on a

$$A > \alpha, B > \beta$$

et alors le minimum est donné par le point  $M_1$ .

12. Reste le cas où  $c > a + b$ ; il faut alors chercher le maximum de  $aPA + bPB - cPC$ . On sait, d'après ce qui précède, que pour  $c > a + b$  on a, quel que soit  $P$ ,

$$aPA + bPB < aCA + bCB + cCP,$$

ou

$$aPA + bPB - cPC < aCA + bCB,$$

et  $C$  donne le maximum cherché.

Par des changements de signes, on déduit de ce qui précède l'étude du maximum ou du minimum de toute somme de la forme

$$\pm aPA \pm bPB \pm cPC \text{ } ^1) \text{ } ^2).$$

Au commencement de l'article qu'on vient de lire, il est fait allusion à la solution suivante du problème proposé:

Soit  $M$  la position du point  $P$  donnant le minimum; si nous faisons varier le point  $P$  sur l'ellipse de foyers  $A$  et  $B$  passant par  $M$ ,  $PA + PB$  est constant; le point  $M$  est donc le point de cette ellipse le plus rapproché de  $C$ ; il en résulte que  $CM$  est une normale à l'ellipse, sans quoi la tangente à l'ellipse n'étant pas perpendiculaire à  $CM$ , le point  $P$  décrivant l'ellipse franchirait à son passage en  $M$  la circonférence de centre  $C$  et de rayon  $CM$ , de sorte qu'il existerait des positions de  $P$  voisines de  $M$

<sup>1)</sup> Les méthodes I et III réussissent aussi pour cette somme. Pour la première, je n'ai pu éviter d'assez grandes complications, mais pour la deuxième, le raisonnement s'applique presque sans changement. La seule difficulté, s'il s'agit de  $aPA + bPB - cPC$ , est l'utilisation de l'inégalité  $c(CM - CP) \leq bMP_c$  à ajouter à des inégalités de sens contraires. Mais, en profitant de la possibilité d'éloigner  $M$  sur  $MC$ , on peut rendre cette inégalité aussi voisine qu'on veut d'une égalité.

<sup>2)</sup> Fin de l'article reproduit.

pour lesquelles  $PA + PB + PC$  serait inférieur à  $MA + MB + MC$ ; de plus, l'ellipse doit être entièrement extérieure au cercle dont nous venons de parler et ne pas contenir ce cercle à son intérieur; donc la demi-droite  $MC$  doit être le prolongement de la demi-droite bissectrice intérieure des demi-droites  $MA, MB$ ; comme la même conclusion s'applique quand on permute  $A, B, C$ , il en résulte que les trois demi-droites  $MA, MB, MC$  doivent faire entre elles des angles de  $120^\circ$ . Toutefois, ce raisonnement suppose que les directions des trois demi-droites soient bien déterminées, donc que  $M$  ne coïncide avec aucun des points  $A, B, C$ . Lorsque l'un des angles du triangle est supérieur ou égal à  $120^\circ$ , il n'existe pas de point  $M$  pour lequel  $MA, MB, MC$  sont à  $120^\circ$ . Le minimum est donc atteint pour un sommet et, évidemment, pour le sommet du plus grand angle. Lorsque chacun des angles est inférieur à  $120^\circ$ , il existe au contraire un tel point  $M$ ; on vérifie facilement que la somme  $MA + MB + MC$  est inférieure à la somme de deux quelconques des côtés du triangle et on en conclut que c'est ce point  $M$  qui donne le minimum.

Pourquoi remplacer cette démonstration si simple par d'autres analogues à celles qu'on a lues? C'est que, pour conclure comme nous l'avons fait, il faut admettre qu'il existe une position  $M$  de  $P$  donnant le minimum de  $PA + PB + PC$ . On peut être tenté de considérer que cela va de soi. Pourtant il est clair qu'il n'y a pas de position de  $P$  donnant le maximum de  $PA + PB + PC$ , de sorte qu'en réalité, s'il nous paraît certain qu'un minimum est atteint, c'est parce que nous n'imaginons pas qu'il pourrait en être autrement et ce défaut d'imagination n'a certainement aucune valeur logique.

Considérons le problème suivant: soient deux points  $A$  et  $B$  et une droite  $AT$  ne passant pas par  $B$ , et demandons-nous quel est le plus court de tous les arcs de courbe d'extrémités  $A$  et  $B$  et ayant  $AT$  pour tangente en  $A$ . On peut tracer de tels arcs différant extrêmement peu du segment  $AB$ . Comme tout arc joignant  $A$  et  $B$  a une longueur au moins égale à  $AB$ , c'est la distance  $AB$  qui fournit ce que l'on peut appeler le minimum de la longueur des arcs considérés. (Ce mot minimum sera d'ailleurs remplacé par un autre d'ici peu.) Mais il est clair qu'aucun de ces arcs n'a la longueur  $AB$ . Voici donc un minimum qui n'est

pas atteint. Ainsi, il apparaît comme essentiel de prouver l'existence de l'extremum que l'on cherche.

Les façons de faire dans lesquelles on néglige de prouver cette existence ont été critiquées sous une forme très imagée, par M. O. Perron. Cherchons avec lui le plus grand des nombres entiers. Ce ne peut être 2 car le carré de 2 est plus grand que 2; ni 3, car le carré de 3 est plus grand que 3; etc... Donc le plus grand des nombres entiers est 1.

La première fois où la nécessité de démontrer l'existence de l'extremum ait été signalée semble être la suivante. Argand, né à Genève, teneur de livres à Paris, avait publié en 1806 un *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques*. C'est là qu'il donne la représentation d'un nombre complexe par son affixe. A la vérité, Argand avait été précédé par le Danois Caspar Wessel qui avait présenté en 1797, à l'Académie Royale de Copenhague, un travail sur le même sujet, travail bien supérieur à celui d'Argand, mais qui ne fut pas remarqué et n'eut aucune influence, bien qu'il ait été publié en 1799 dans les Mémoires de l'Académie. Il s'en fallut de peu que le travail d'Argand fût aussi peu remarqué que celui de Wessel. Mais Jacques Français, à la mort de son frère aîné, trouva dans les papiers de celui-ci une lettre de Legendre mentionnant sans en nommer l'auteur la représentation qu'avait donnée Argand. Français pria cet auteur inconnu de se faire connaître et c'est ainsi qu'Argand reprit en quelque sorte son essai dans les *Annales de Mathématiques pures et appliquées*, tome VI, pages 61 à 71. En particulier, il donne là une démonstration du théorème de d'Alembert se réduisant à cette constatation: si une valeur  $z_0$  de la variable complexe  $z$  fournit pour le module d'un polynome  $f(z)$  une valeur positive, il y a au voisinage de  $z_0$  des valeurs de  $z$  donnant au module une valeur plus petite. Il en résulte que, seuls, les zéros du polynome  $f(z)$  peuvent donner le minimum du module de  $f(z)$ , et comme Argand admet que ce minimum est atteint, il en conclut que toute équation  $f(z) = 0$  admet des racines. Servois critique le mémoire d'Argand dans le même tome des *Annales*, pages 228 à 235. Il écrit notamment: « Ce n'est point assez, ce me semble, de trouver des valeurs de  $x$  qui donnent au polynome des valeurs sans cesse décroissantes;

il faut de plus que la loi des décroissements amène nécessairement le polynome à zéro, ou qu'elle soit telle que zéro ne soit pas, si l'on peut s'exprimer ainsi, l'asymptote du polynome. »

Cette fine critique de Servois fut faite à nouveau en termes plus précis par Weierstrass à l'occasion des recherches de Riemann sur les fonctions algébriques, recherches fondées sur le problème de minimum connu sous le nom de problème de Dirichlet. A cette occasion, Weierstrass montra que les fonctions continues d'une ou de plusieurs variables atteignent leurs extrema lorsqu'on ne considère ces fonctions que dans des domaines bornés. D'autre part, il introduisit ce que l'on a appelé les conditions suffisantes dans le Calcul des variations. Pour le moment, rappelons seulement les dénominations précises qu'il a introduites. Une famille de nombres étant donnée, on appelle *borne inférieure* de ces nombres le plus grand des nombres tels qu'aucun nombre de la famille ne lui soit inférieur. La *borne supérieure* se définit d'une manière analogue. Toute famille de nombres admet nécessairement une borne inférieure et une borne supérieure, seulement la borne inférieure peut être  $-\infty$  et la borne supérieure  $+\infty$ . Supposons que la famille de nombres considérée soit la famille des valeurs prises par une fonction  $f(X)$ . D'après la définition même de la borne inférieure, cette borne sera, ou le plus petit des nombres  $f(X)$ , ou le plus grand des nombres inférieurs à  $f(X)$ . Dans le premier cas seulement, on dira que la fonction a un *minimum*; c'est le cas où nous disions précédemment que le minimum est atteint. Dans le second cas, il vaut mieux remplacer le mot de minimum par l'expression borne inférieure.

Il ne faut pas trop s'étonner que la distinction entre minimum et borne inférieure, ou maximum et borne supérieure ait été faite si tardivement. C'est qu'elle n'a aucune signification concrète. Qui oserait décider s'il existe une charge maxima que peut supporter un pont, plutôt qu'une charge minima qui le fasse écrouler ? Aussi s'explique-t-on que les physiciens, dont les recherches ont posé certains problèmes de minimum comme celui de Dirichlet, aient été longs à admettre que les recherches des mathématiciens relatives à ces problèmes ne soient pas de simples jeux, mais des travaux nécessaires.