

UNE SIMPLE DÉMONSTRATION DE LA NON-DÉRIVABILITÉ DE LA FONCTION DU TYPE DE WEIERSTRASS

Autor(en): **Tarnawski, E.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **8 (1962)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-37966>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

UNE SIMPLE DÉMONSTRATION
DE LA NON-DÉRIVABILITÉ DE LA FONCTION
DU TYPE DE WEIERSTRASS

par E. TARNAWSKI

(Reçu le 13 mai 1962)

M. G. de Rahm a prouvé [1] d'une manière très simple qu'une fonction de la forme

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \varphi(b^k x), \quad (1)$$

où b est un nombre pair, $a = b^{-1}$ et

$$\varphi(x) = \min_p |x - p| \quad (p \text{ entier}) \quad (2)$$

n'admet pas de dérivée. Il a remarqué aussi que la méthode de la démonstration ne s'adapte pas au cas où $\varphi(x) = \cos x$ et que aussi, si dans ce dernier cas $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$, $0 < a < 1$, b est impair (exemple de Weierstrass), la démonstration n'est plus simple du tout.

Cependant dans [2] j'ai pu donner une méthode permettant de démontrer, assez facilement, la non-dérivabilité de la fonction $f(x)$ définie par (1) dans le cas où les coefficients a, b satisfont aux conditions énumérées à la page 27 de ladite note (Theorem 9d) tandis que la fonction $\varphi(x)$ est périodique, non constante et vérifie outre la condition de Lipschitz la condition suivante:

pour tout x il existe un nombre h_x de module constant h^* (indépendant de x) tel que l'inégalité

$$|\varphi(x + h_x) - \varphi(x)| \geq d > 0$$

est satisfaite pour une certaine constante d et pour tout x ¹⁾.

¹⁾ Cf. [2], p. 13.

Cette dernière condition est par exemple remplie par les fonctions périodiques (de période l) dont les deux premières dérivées sont continues et qui dans l'intervalle $\langle 0, l \rangle$ n'ont qu'un nombre fini de zéros ¹⁾.

Par contre, la démonstration de la non-dérivabilité de la fonction $f(x)$ lorsque $\varphi(x) = \cos x$ est particulièrement simple au point de vue des calculs numériques qu'elle nécessite si l'on pose dans la formule (1) $a = \frac{3}{4}$, $b = \frac{1}{4}$ ²⁾.

Voici la démonstration (qui semble avoir une valeur didactique) de la non-dérivabilité de la fonction

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k \cos 4^k x. \quad (3)$$

Considérons les intervalles fermés à gauche Δ_m de même longueur $\frac{\pi}{2}$ dont les extrémités gauches se trouvent aux points $\frac{\pi}{2} m$ (m entier). x_0 étant une valeur établie, m déterminé par la relation $4^n x_0 \in \Delta_m$, définissons la suite

$$h_n = (-1)^m \frac{\pi}{2 \cdot 4^n}. \quad (4)$$

Calculons

$$\frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n} = A_1 + A_2 + A_3,$$

où

$$A_1 = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{3}{4}\right)^k \frac{\cos \left[4^k \left(x_0 + (-1)^m \frac{\pi}{2 \cdot 4^n} \right) \right] - \cos 4^k x_0}{(-1)^m \pi/2 \cdot \frac{1}{4^n}}$$

$$A_2 = \left(\frac{3}{4}\right)^n \frac{\cos \left[4^n \left(x_0 + (-1)^m \frac{\pi}{2 \cdot 4^n} \right) \right] - \cos 4^n x_0}{(-1)^m \pi/2 \cdot \frac{1}{4^n}}$$

1) Cf. le lemme 3 de [2], p. 18.

2) Cf. l'astérisque 18) de [2], p. 33.

$$A_3 = \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k \frac{\cos \left[4^k \left(x_0 + (-1)^m \frac{\pi}{2 \cdot 4^n} \right) \right] - \cos 4^k x_0}{(-1)^m \pi / 2 \cdot \frac{1}{4^n}}$$

a) Afin de limiter la somme A_1 faisons les substitutions

$$4^k x_0 = u, \quad \frac{\pi}{2 \cdot 4^{n-k}} = h$$

Attendu que

$$\left| \frac{\cos (u + (-1)^m h) - \cos u}{(-1)^m h / 4^k} \right| = \left| \frac{-\sin \left(u + (-1)^m \frac{h}{2} \right)}{4^{-k}} \cdot \frac{\sin (-1)^m \frac{h}{2}}{(-1)^m \frac{h}{2}} \right| < 4^k$$

on a

$$|A_1| \leq \sum_{k=0}^{n-1} 3^k = \frac{1}{2} (3^n - 1). \tag{5}$$

b) La limitation de l'expression A_2 est d'après

$$\sin \left[4^n x_0 + (-1)^m \frac{\pi}{4} \right] \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

la suivante

$$\begin{aligned} |A_2| &= \left(\frac{3}{4}\right)^n \frac{2}{\pi} 4^n \cdot \left| \cos \left[4^n x_0 + (-1)^m \frac{\pi}{2} \right] - \cos 4^n x_0 \right| \tag{6} \\ &= \frac{2}{\pi} 3^n \left| -2 \sin \left[4^n x_0 + (-1)^m \frac{\pi}{4} \right] \sin \left((-1)^m \frac{\pi}{4} \right) \right| \geq \frac{2}{\pi} 3^n. \end{aligned}$$

c) Vu que le nombre $4^k \frac{\pi}{2 \cdot 4^n}$ pour $k > n$ est un multiple de 2π , on a

$$A_3 = 0. \tag{7}$$

Par conséquent on obtient, en tenant compte de (5), (6), (7), que pour la suite $\{h_n\}$ définie par la formule (4) les relations ont lieu

$$\left| \frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n} \right| \geq |A_2| - |A_1| \geq \left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} \right) 3^n \rightarrow \infty.$$

BIBLIOGRAPHIE

1. G. DE RAHM, Sur un exemple de fonction continue sans dérivée. *Enseignement mathématique*, III (1957), pp. 71-72.
2. E. TARNAWSKI, Continuous functions in the logarithmic—power classification according to Hölder's conditions. *Fundamenta Mathematicae*, XLII (1955), pp. 11-37.

Chaire de Mathématiques
Ecole Polytechnique de Gdańsk
Pologne.