3. COHOMOLOGIE, HINDERNIS, TRANSGRESSION.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **8 (1962)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

3. Cohomologie, Hindernis, Transgression.

Wir betrachten hier nicht einen einzelnen Testraum B, sondern eine Folge von Räumen (Polyedern) B_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ und Homotopieäquivalenzen $\omega_n : B_n \to \Omega B_{n+1}$. Die Gruppen $\Pi_n(A, B_{m+n}) = \Pi(A, \Omega^n B_{m+n}) \cong \Pi(A, B_m)$ sind dann von $n > 0$ unabhängig, vermöge bestimmter Isomorphismen; wir bezeichnen sie mit $h^m(A)$. Dasselbe gilt für die relativen Gruppen $P_{n+1}(\alpha, B_{m+n})$, für eine Abbildung $\alpha : A \to A'$, die mit $h^m(\alpha)$ bezeichnet werden.

Diese Gruppen $h^m(A)$, $h^m(\alpha)$, bezw. ihre direkten Summen $h^*(A)$ und $h^*(\alpha)$ erfüllen dann die Eigenschaften

(I′) Exaktheit, d.h. man hat ein exaktes Dreieck

$$\begin{tikzcd} h^*(A') \arrow[rr, "\alpha^*"] & & h^*(A) \arrow[dl, "J"] \\ & h^*(\alpha) \arrow[ul, "\partial"] & \end{tikzcd}$$

wobei J (gewöhnlich mit δ bezeichnet) den Grad $+1$ hat, und ∂ den Grad 0, dies wegen der Definition der $h_m(\alpha) = P_1(\alpha, B_m)$.

(II′) Exzision, d.h. man hat für Cofaserungen α mit der Cofaser A_0 einen Exzisionsisomorphismus vom Grade 0

$$h^*(\alpha) \cong h^*(A_0)\,.$$

(III′) Homotopie.

Von den Cohomologie-Axiomen von Eilenberg-Steenrod fehlt also nur das *Dimensionsaxiom* $h^m(S_k) = 0$ für $m \neq k$; es ist dann erfüllt, wenn alle B_n Eilenberg-MacLane-Polyeder $K(G, n)$ sind, wobei G eine beliebige Abelsche Gruppe ist (für alle n dieselbe, da $\pi_n(B_n) \cong \pi_n(\Omega B_{n+1}) = \pi_{n+1}(B_{n+1})$ ist), und in diesem Fall ist der Homotopietypus von B_m, somit die Struktur von $h^m(A)$ und $h^m(\alpha)$ durch die Gruppe G und die Zahl m bestimmt. Wir schreiben für diese Gruppen, die eine volle Cohomologietheorie [1]) bilden, $H^m(A; G)$ bezw. $H^m(\alpha; G)$. Auf die

[1]) Es handelt sich natürlich um die „reduzierte" Cohomologie für Räume mit Basispunkt; daraus lässt sich in bekannter Weise die „nicht reduzierte" für Räume ohne Basispunkt herleiten.

verallgemeinerten Cohomologietheorien ohne Dimensionsaxiom gehen wir hier nicht ein.

Diese homotopisch definierten Gruppen H^m stimmen (nach dem Eindeutigkeitssatz von Eilenberg-Steenrod) für ein endliches Polyeder mit den üblichen überein. Für kompakte Räume — und unter gewissen Einschränkungen auch für parakompakte — sind es die Čechschen Cohomologiegruppen, vgl. P. J. Huber [6]. Für beliebige (endliche oder unendliche) Polyeder A lässt sich mit Hilfe der Tripelsequenz (vgl. Abschnitt 2) leicht in direkter und elementarer Weise zeigen, dass sie mit den gewöhnlichen simplizialen Cohomologiegruppen zusammenfallen; dabei ergibt sich folgende Beschreibung der simplizialen Cozyklen von A: Es bezeichne A^k das k-dimensionale Skelett von A, j_m die Inklusion $A^{m-1} \to A$; die Cozyklengruppe Z^m ist isomorph $P_1(j_m, K(G, m))$, d.h. ein Cozyklus ist eine Abbildungsklasse $\Phi = (\varphi, \varphi')$

$$\begin{array}{ccc} A^{m-1} & \xrightarrow{\varphi} & EK(G, m) \\ j_m \downarrow & \overset{\Phi}{\Rightarrow} & \downarrow p \\ A & \xrightarrow{\varphi'} & K(G, m) \end{array}$$

wo $EK(G, m)$ den Wegeraum und p seine natürliche Projektion bedeutet. Die Cohomologieklasse von Φ ist das durch φ' gegebene Element von $\Pi(A, K(G, m)) = H^m(A; G)$.

Eine einfache Anwendung hievon: Es sei $f: E \to B$ eine Faserabbildung mit der Faser F, und $s: B^{m-1} \to E$ eine Schnittfläche über dem $(m—1)$-Skelett von B (also $fs = j_m$). Ferner sei $\Phi: f \to p$ eine Abbildung von f in die Faserung $p: EK(G, m) \to K(G, m)$, d.h. ein Element der relativen Gruppe $P_1(f, K(G, m)) = H^m(f; G)$. Im Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} B^{m-1} & \xrightarrow{s} & E & \xrightarrow{\varphi} & EK(G, m) \\ j_m \downarrow & \overset{\Psi}{\Rightarrow} & \downarrow & \overset{\Phi}{\Rightarrow} & \downarrow p \\ B & \xrightarrow[1]{} & B & \xrightarrow[\varphi']{} & K(G, m) \end{array}$$

ist $\Phi\Psi$ ein simplizialer m-Cozyklus von B. Man verifiziert leicht, dass er folgende Bedeutung hat: es ist der zur Schnittfläche s gehörige *Hinderniscozyklus* η (mit Koeffizienten in $\pi_{m-1}(F)$), in welchem man die Werte noch einem Koeffizienten-Homomorphismus $h : \pi_{m-1}(F) \to G$ unterworfen hat, nämlich dem durch Φ induzierten Homomorphismus von π_{m-1} der Faser von f in π_{m-1} der Faser von p (diese ist $\Omega K(G, m)$, also ist $\pi_{m-1}(\Omega K(G, m)) = G)$.

Die *Cohomologieklasse* dieses Cozyklus $\Phi\Psi = h_*(\eta)$ ist gemäss der obigen Vorschrift gegeben durch die „untere Komponente" von Φ, also durch $\varphi' \in H^m(B; G)$ und *somit von s unabhängig*. φ' ist übrigens nichts anderes als ein durch *Transgression* aus einem Cohomologieelement $\in H^{m-1}(F; G)$ der Faser gewonnenes Element. Man beachte, dass dieser Zusammenhang zwischen Hindernis und Transgression nicht nur für das "erste Hindernis", sondern für eine beliebige Schnittfläche gilt. Im Fall des *ersten Hindernisses*, d.h. wenn die Faser F (m-2)-zusammenhängend ist ($\pi_i(F) = 0$, $i \leqslant m-2$), weiss man, dass eine Fundamentalklasse $\Phi \in H^m(f; \pi_{m-1}(F))$ existiert, derart dass der induzierte Homomorphismus h von $\pi_{m-1}(F)$ in $G = \pi_{m-1}(F)$ die Identität ist; somit ist dann der Cozyklus $\Phi\Psi = \eta$ gleich dem *ersten Hinderniscozyklus selbst*, und seine Cohomologieklasse $\in H^m(B; \pi_{m-1}(F))$ ist einfach gleich der Komponente φ' von Φ, unabhängig von der speziell gewählten (m—1)-Schnittfläche.

Damit wird auch eine Definition des ersten Hindernisses nahegelegt, die nicht auf der Polyeder-Eigenschaft von B beruht und das übliche schrittweise Erweiterungsverfahren nicht benützt: es ist gegeben durch die Komponente φ' einer Fundamentalklasse $\Phi \in H^m(f; \pi_{m-1}(F))$. Von dieser Hindernisklasse $\varphi' \in H^m(B; \pi_{m-1}(F))$ lässt sich im Falle $F = K(G, m-1)$ direkt nachweisen, dass sie die Faserungen $E \to B$ mit Faser $K(G, m-1)$ charakterisiert.

Auf den Fall höherer Hindernisse soll an anderer Stelle eingegangen werden.

4. Ausblicke.

Die homotopische Auffassung der Cohomologie, wie sie oben skizziert ist, lässt sich sehr weit fortführen (obwohl die explizite Berechnung in Spezialfällen sich stets auf simpliziale oder Zellenstrukturen stützt). In diesen Gedankenkreis gehört die Postnikovzerlegung eines Raumes (Charakterisierung des Homo-