2. Die exakte Sequenz der relativen Gruppen.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **8 (1962)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.04.2024**

Die Gruppen $\Pi_*(A, B)$ besitzen somit die Eigenschaften:

bei festem A

(I) Exaktheit für Abbildungen $\beta : B \to B'$ und passende relative Gruppen $P_*(A, \beta)$,

(II) Exzision für Faserungen;

bei festem B

(I′) Exaktheit für Abbildungen $\alpha : A \to A'$ und passende relative Gruppen $P_*(\alpha, B)$,

(II′) Exzision für Cofaserungen.

Hiezu kommt offenbar die Homotopie-Eigenschaft (III) bezw. (III′), dass homotope Abbildungen denselben Homomorphismus β_* bezw. α^* induzieren. Die Gruppen $\Pi_*(A, B)$ verdienen also weitgehend die Bezeichnung *Cohomologiegruppen mit Koeffizientenraum* B oder *Homotopiegruppen mit Koeffizientenraum* A, wobei eine Unterscheidung für die „absoluten" Gruppen nicht möglich ist — sie liegt nur in der Auffassung als Funktor von A bezw. B —, sondern erst bei den relativen Gruppen auftritt. Die Uebereinstimmung mit der vollen Cohomologietheorie erhält man allerdings erst durch die spezielle Wahl von Eilenberg-MacLane-Räumen als Testräume B, vgl. Abschnitt 3.

2. Die exakte Sequenz der relativen Gruppen.

Sind β_1 und β_2 Abbildungen, $\beta_1 : B_1 \to B'_1$, $\beta_2 : B_2 \to B'_2$, so versteht man unter einer Abbildung $\Phi : \beta_1 \to \beta_2$ ein Paar von Abbildungen $\varphi : B_1 \to B_2$ und $\varphi' : B'_1 \to B'_2$ derart dass

$$\begin{array}{ccc} B_1 & \xrightarrow{\varphi} & B_2 \\ \beta_1 \downarrow & & \downarrow \beta_2 \\ B'_1 & \xrightarrow{\varphi'} & B'_2 \end{array}$$

kommutativ ist. Eine solche Abbildung Φ induziert Homomorphismen $\Phi_* : P_n(A, \beta_1) \to P_n(A, \beta_2)$, $n = 1, 2, \ldots,$ die sich wiederum durch passende relative Gruppen "zweiter Stufe"

$\mathbf{P}_n(A, \Phi)$ zu einer exakten Sequenz verknüpfen lassen; wie vorher schreiben wir auch diese als exaktes Dreieck

$$\begin{tikzcd} P_*(A, \beta_1) \arrow[rr, "\Phi_*"] & & P_*(A, \beta_2) \arrow[dl, "J"] \\ & \mathbf{P}_*(A, \Phi) \arrow[ul, "\partial"] & \end{tikzcd} \qquad (2.1)$$

Dual hiezu erhält man für die Gruppen $P_*(\alpha, B)$ und für eine Abbildung $\Phi : \alpha_1 \to \alpha_2$ ein exaktes Dreieck

$$\begin{tikzcd} P_*(\alpha_2, B) \arrow[rr, "\Phi^*"] & & P_*(\alpha_1, B) \arrow[dl, "J"] \\ & \mathbf{P}(\Phi, B) \arrow[ul, "\partial"] & \end{tikzcd} \qquad (2.2)$$

Das Verfahren lässt sich natürlich iterieren, und man gelangt zu relativen Gruppen beliebig hoher Stufe.

Aus den beiden exakten Dreiecken erhält man durch Spezialisierung viele bekannte Folgen der Cohomologie – und der Homotopietheorie, so insbesondere die *Triadensequenzen* und die *Tripelsequenzen* (vgl. [4]). Wir weisen hier nur auf die Tripelsequenz hin, die aus (2.1) entsteht, wenn man $B_1 = B_2$ und $\varphi =$ Identität wählt, also $\beta_2 = \varphi'\beta_1$; man erhält dann das exakte Dreieck

$$\begin{tikzcd} P_*(A, \beta_1) \arrow[rr, "\Phi_*"] & & P_*(A, \beta_2) \arrow[dl, "J"] \\ & P_*(A, \varphi') \arrow[ul, "\partial"] & \end{tikzcd}$$

in welchem Φ_* und J vom Grad 0, ∂ vom Grad -1 ist und welches die Verknüpfung der $P_*(A, \beta)$ *für die Zusammensetzung zweier Abbildungen* liefert. Ebenso erhält man aus (2.2) ein zum obigen duales Dreieck. (Die Spezialfälle, wo die betreffenden Abbildungen Inklusionen sind, sind wohlbekannt für Cohomologie- und Homotopiegruppen.)

Für Zusammensetzungen von mehr als zwei Abbildungen ergeben sich hieraus leicht verschiedene *Spektralreihen* für die $P_*(A, \beta)$, die Cohomologiegruppen usw., die alle bekannten und für Theorie und Anwendung wichtigen Spektralreihen als Spezialfälle enthalten.