Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 8 (1962)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: HOMOTOPIE UND HOMOLOGIE
Autor: Eckmann, Beno
Kapitel: 2. Die exakte Sequenz der relativen Gruppen.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-37962

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 10.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Die Gruppen $\Pi_*(A, B)$ besitzen somit die Eigenschaften:

bei festem A

(I) Exaktheit für Abbildungen $\beta : B \to B'$ und passende relative Gruppen $P_*(A, \beta)$,

(II) Exzision für Faserungen;

bei festem B

(I′) Exaktheit für Abbildungen $\alpha : A \to A'$ und passende relative Gruppen $P_*(\alpha, B)$,

(II′) Exzision für Cofaserungen.

Hiezu kommt offenbar die Homotopie-Eigenschaft (III) bezw. (III′), dass homotope Abbildungen denselben Homomorphismus β_* bezw. α^* induzieren. Die Gruppen $\Pi_*(A, B)$ verdienen also weitgehend die Bezeichnung *Cohomologiegruppen mit Koeffizientenraum B* oder *Homotopiegruppen mit Koeffizientenraum A*, wobei eine Unterscheidung für die „absoluten" Gruppen nicht möglich ist — sie liegt nur in der Auffassung als Funktor von A bezw. B —, sondern erst bei den relativen Gruppen auftritt. Die Uebereinstimmung mit der vollen Cohomologietheorie erhält man allerdings erst durch die spezielle Wahl von Eilenberg-MacLane-Räumen als Testräume B, vgl. Abschnitt 3.

2. Die exakte Sequenz der relativen Gruppen.

Sind β_1 und β_2 Abbildungen, $\beta_1 : B_1 \to B'_1$, $\beta_2 : B_2 \to B'_2$, so versteht man unter einer Abbildung $\Phi : \beta_1 \to \beta_2$ ein Paar von Abbildungen $\varphi : B_1 \to B_2$ und $\varphi' : B'_1 \to B'_2$ derart dass

$$\begin{array}{ccc} B_1 & \xrightarrow{\varphi} & B_2 \\ \beta_1 \downarrow & & \downarrow \beta_2 \\ B'_1 & \xrightarrow{\varphi'} & B'_2 \end{array}$$

kommutativ ist. Eine solche Abbildung Φ induziert Homomorphismen $\Phi_* : P_n(A, \beta_1) \to P_n(A, \beta_2)$, $n = 1, 2, \ldots$, die sich wiederum durch passende relative Gruppen "zweiter Stufe"

$\mathbf{P}_n(A, \Phi)$ zu einer exakten Sequenz verknüpfen lassen; wie vorher schreiben wir auch diese als exaktes Dreieck

$$\begin{tikzcd} P_*(A, \beta_1) \arrow[rr, "\Phi_*"] & & P_*(A, \beta_2) \arrow[dl, "J"] \\ & \mathbf{P}_*(A, \Phi) \arrow[ul, "\partial"] & \end{tikzcd} \tag{2.1}$$

Dual hiezu erhält man für die Gruppen $P_*(\alpha, B)$ und für eine Abbildung $\Phi : \alpha_1 \to \alpha_2$ ein exaktes Dreieck

$$\begin{tikzcd} P_*(\alpha_2, B) \arrow[rr, "\Phi^*"] & & P_*(\alpha_1, B) \arrow[dl, "J"] \\ & \mathbf{P}(\Phi, B) \arrow[ul, "\partial"] & \end{tikzcd} \tag{2.2}$$

Das Verfahren lässt sich natürlich iterieren, und man gelangt zu relativen Gruppen beliebig hoher Stufe.

Aus den beiden exakten Dreiecken erhält man durch Spezialisierung viele bekannte Folgen der Cohomologie – und der Homotopietheorie, so insbesondere die *Triadensequenzen* und die *Tripelsequenzen* (vgl. [4]). Wir weisen hier nur auf die Tripelsequenz hin, die aus (2.1) entsteht, wenn man $B_1 = B_2$ und $\varphi =$ Identität wählt, also $\beta_2 = \varphi'\beta_1$; man erhält dann das exakte Dreieck

$$\begin{tikzcd} P_*(A, \beta_1) \arrow[rr, "\Phi_*"] & & P_*(A, \beta_2) \arrow[dl, "J"] \\ & P_*(A, \varphi') \arrow[ul, "\partial"] & \end{tikzcd}$$

in welchem Φ_* und J vom Grad 0, ∂ vom Grad —1 ist und welches die Verknüpfung der $P_*(A, \beta)$ *für die Zusammensetzung zweier Abbildungen* liefert. Ebenso erhält man aus (2.2) ein zum obigen duales Dreieck. (Die Spezialfälle, wo die betreffenden Abbildungen Inklusionen sind, sind wohlbekannt für Cohomologie- und Homotopiegruppen.)

Für Zusammensetzungen von mehr als zwei Abbildungen ergeben sich hieraus leicht verschiedene *Spektralreihen* für die $P_*(A, \beta)$, die Cohomologiegruppen usw., die alle bekannten und für Theorie und Anwendung wichtigen Spektralreihen als Spezialfälle enthalten.