Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 8 (1962)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: DIE ANFANGERVORLESUNG ZUR INFINITESIMALRECHNUNG AN DEN DEUTSCHEN UNIVERSITÄTEN

Autor: Behnke, H.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-37955

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

DIE ANFÄNGERVORLESUNG ZUR INFINITESIMALRECHNUNG AN DEN DEUTSCHEN UNIVERSITÄTEN[1])

von H. Behnke

Keine mathematische Vorlesung an den deutschen Universitäten ist von so entscheidender Bedeutung für den Erfolg des gesamten etwa 6 Jahre währenden Studiums wie die über Infinitesimalrechnung. Sie ist die grosse Anfängervorlesung. Sie bestimmt bei geeigneter Auswahl der Dozenten in starkem Masse die geistige Haltung der Studenten, ihre Auffassung von Mathematik und mathematischem Beweis, ihren Sinn für die Schönheit mathematischer Theorien, ihre persönliche Bindung an ihr Studienfach. Zugleich aber bildet der behandelte Stoff die Grundlage für die Mehrzahl der weiteren Vorlesungen. Was hier durch falsche Behandlung der Menschen und der Gegenstände an Schaden angerichtet werden kann, ist während des ganzen Studiums kaum wieder wett zu machen.

So versteht es sich von selbst, dass das grösste didaktische Problem im mathematischen Unterricht an den Hochschulen die Frage nach der Gestaltung der Vorlesungen über Infinitesimalrechnung ist. Um die Aufgaben, die eine solche Vorlesung dem Dozenten stellt, zu erörtern, muss zunächst das Publikum geschildert werden, für das eine solche Vorlesung gedacht ist. Es sind durchwegs 20-jährige Menschen, die auf der Schule mindestens während eines Unterrichtsjahres etwas von der Technik der Infinitesimalrechnung schon erlernt haben. Differentiieren und Integrieren braucht nicht geübt zu werden. Manchmal sind die Studenten auf den Schulen — vor allem durch zu gewaltsame anschauliche und physikalische Interpretationen — schon verdorben. Sie glauben, dass nur solche Mathematik vernünftig ist, bei der man das Differential nach Metern zu messen, und wenn es ganz spitzfindig zugehen sollte, nach Vielfachen von Wellen-

---

[1]) Erweiterte Fassung eines Vortrags, gehalten am 27.6.61 anlässlich des JCMI-Seminars in Lausanne.

längen anzugeben vermag. Daneben gibt es grossartig vorbereitete Studenten. Sie kommen immer von denselben Schulen.

Die meisten Hörer der Vorlesung beabsichtigen, ein volles mathematisches Studium durchzuführen, also etwa 12 Semester zu studieren, um dann an ein Gymnasium oder in die Industrie zu gehen. Manche wollen auch ein volles physikalisches Studium durchführen und dazu nach 6 Semestern ein mathematisches Vorexamen absolvieren. Nach 2 Semestern müssen alle Hörer die Mathematik beherrschen, welche die theoretischen Physiker in ihren Grundvorlesungen benötigen. Das ist für uns eine sehr schwere Hypothek. Und es ist kein Geheimnis, dass über diese Nebenbedingung zwischen den Dozenten der Mathematik und Physik sehr häufig Meinungsverschiedenheiten bestehen. Diese sind der Meinung, dass die Studenten viel zu sehr ins Abstrakte und zu „unfruchtbaren Existenzbeweisen" geführt werden, jene, dass der Dozent der Physik sich zu veralteter mathematischer Begriffsbildungen und Terminologien bedienen.

Zur Verfügung stehen für die Vorlesung Infinitesimalrechnung während eines akademischen Jahres wöchentlich etwa 5 Stunden Vorlesung und 2 Stunden Uebungen. Analytische Geometrie wird völlig unabhängig davon in der gleichen Zeit und fast in gleichem Umfang gelesen. Doch gibt es selten eine Absprache der beiden Dozenten über eine Koordinierung, die besonders hinsichtlich der Uebungen sinnvoll wäre.

In der Infinitesimalrechnung ist es üblich, keine Anwendungen zu bringen. Die Infinitesimalrechnung soll nach der Auffassung der meisten Dozenten dem jungen Studenten das erste Beispiel einer ganz in sich selbst ruhenden mathematischen Theorie liefern. Anwendungen gehören als Exkurse in die Uebungen, aber nicht in die Vorlesung. Das Lehrbuch von Courant — zuerst erschienen 1927 — scheint mir das neueste Lehrbuch zu sein, wo noch Anwendungen, besonders physikalischer Art, mit dem Aufbau der Theorie verwoben werden und das noch viel von Hörern unserer Vorlesungen gebraucht wird. Soweit ich sehe, liegt es aber kaum mehr den Vorlesungen an den Universitäten zugrunde, weil es wegen seiner engen Verbindung mit den Anwendungen den logischen Aufbau nicht zum ausschliesslichen Prinzip des „Begreifens" macht.

Das Publikum, das in dieser Vorlesung vor uns sitzt, ist ernsthaft an Mathematik oder wenigstens an dem, was es dafür hält, interessiert. Es hat eine grosse jugendliche Begeisterungsfähigkeit für unsere Wissenschaft. Das ist ein Kapital, das in unseren Händern wuchert, nicht aber achtlos vertan werden sollte. (Auf diese Verpflichtung kann man unsere jungen Kollegen nicht ernsthaft genug hinweisen.)

Deshalb ist es auch die allerwichtigste Aufgabe für den Dozenten, die Vorlesung stets interessant zu erhalten. Diese Forderung erscheint mir wichtiger als alle anderen Gesichtspunkte, in jedem Falle auch noch als die der Lückenlosigkeit.

Die Qualität der Vorbildung unserer Studenten ist naturgemäss recht verschieden und hängt wesentlich mehr von der einzelnen Schule als von der Schulgattung ab. Auf reale Kenntnisse baut der Dozent zweckmässig nicht allzu sehr. Aber es ist grundfalsch, als Dozent zu behaupten: „Ich setze nichts voraus". Eine gewisse Uebung im mathematischen Denken und eine Festigkeit im Umgang mit mathematischen Symbolen wird bestimmt von jedem Dozenten trotz seines Leugnens vorausgesetzt. Ich habe immer jeden Dozenten, der besonders auf die Voraussetzungslosigkeit seiner Vorlesung hinweist, in Verdacht, dass er gerade besonders viel bei seinen Hörern voraussetzt; freilich nicht an Fakten — wohl aber an abstraktem Denkvermögen, an Vorstellungskraft und Bereitschaft, diffizilen Gedankengängen zu folgen. Das aber bedeutet frühes und umfangreiches mathematisches Training — das normalerweise durch den Schulunterricht erreicht werden soll.

Ich betone dies besonders gerne, weil ich es als eine Ehrenpflicht gegenüber unseren Kollegen auf den Gymnasien ansehe, auch anzuerkennen, was von ihnen in zermürbender Kleinarbeit geleistet wird. Der gute Student kommt auch immer von derselben Schule. Dafür gibt es keine äusseren Gründe. Das liegt eindeutig an guten Lehrkräften, die fähig sind, besonders begabte Schüler für den Unterricht zu interessieren, sie gut auszubilden und zum Studium der Mathematik zu ermuntern. Von anderen Schulen des Einzugsgebietes einer Universität bekommt man nie einen Studenten zu sehen.

Das ist der äussere Rahmen, in dem die Vorlesung über

Infinitesimalrechnung in Deutschland stattfindet. Nun über das innere Spannungsfeld! Wie weit kann vernünftigerweise die Belastung der Hörer an Umfang des Stoffes gehen, wie weit darf in diesem ersten Jahr eine Anforderung an Abstraktionsvermögen und an axiomatischem Verständnis vorausgesetzt werden? Wie weit darf man die Forderung nach Lückenlosigkeit der Beweise treiben? Zunächst über den Umfang! Offenbar kann man nicht — um extreme Grenzen zu nennen — von Dedekinds „Was sind und was sollen die Zahlen?" oder von den Axiomen des Hausdorff-Raumes in einem Jahre bis zu den Differentialformen, den mehrfachen Integralen, dem Stokeschen Satz und gar noch den Filtern kommen und dabei auch noch den klassischen Stoff dieser Vorlesung, die nun eine Tradition von 130 Jahren in Deutschland hat, bringen. Das letztere aber wird zweifellos mit Recht von den Vertretern der Naturwissenschaften in der Fakultät, insbesondere den Physikern, erwartet. So wird die Notwendigkeit, den Stoff irgendwie einzuschränken, jedem einleuchten. Man kann auch nicht schon am Ende des 2. Semesters die Studenten zu perfekten alles verstehenden Mathematikern erzogen haben wollen. Eine Bescheidenheit in den Zielsetzungen ist für den Erfolg der Vorlesung von entscheidender Bedeutung.

Die Auswahl des Axiomensystems muss notwendig auch unter didaktischen Gesichtspunkten gesehen werden. Man kann nicht mit der Topologie und dem allgemeinen Begriff der Kompaktheit (dem Heine-Borelschen Ueberdeckungssatz) beginnen wollen. Die Auswahl des Axiomensystems ist durchaus nicht nur ein mathematisches Problem. Auch für den besonders intelligenten Anfänger ist zunächst noch jeder mathematische Begriff und jede Aussage inhaltlich belastet. Die gelegentliche Aufforderung von Dozenten „man solle sich nichts bei den Axiomen denken" ist ganz besonders ungeschickt und übt leicht eine Schockwirkung auf den Hörer aus. Der will ja keine Spielerei vorgesetzt bekommen — dazu ist ihm sein junges 20-jähriges Leben zu schade — sondern Erkenntnisse. Dass der formale Charakter der Mathematik ihren Wert nicht mindert, lernt er erst viel später. Und auch der anspruchsvolle, ausgewachsene Mathematiker hört sich ja nicht eine Vorlesung über ein ihm bisher unbekanntes Axiomensystem und seine Folgerungen an,

ohne — aus welchen Gründen auch immer — das Vertrauen zu haben, dass dabei mathematisch Wertvolles gewonnen wird, was den erforderlichen Zeitaufwand in unserem kurzen Erdendasein lohnt. Daran müssen vor allem die jungen Dozenten erinnert werden, die — ausgereifte Mathematiker aber keine erfahrenen Lehrer — dazu neigen, allein das logische Gerippe der Vorlesung hervortreten zu lassen, und dabei übersehen, dass ohne eine metamathematische Wertung keine mathematische Theorie möglich ist, weil sich die wichtigen und charakteristischen Aussagen in der unendlichen Fülle richtiger Aussagen verlieren würden. Der Hörer erwartet unablässig die innere Rechtfertigung für das Treiben, das da vorne an der Tafel vor sich geht. Wehe dem Dozenten, der dafür kein Organ hat! Er verliert schnell die wesentlichen Menschen aus seinem Hörerkreis.

Edmund Landau hat immer als der Prototyp der entschiedenen Mathematiker gegolten, die ausser Voraussetzung, Behauptung, Beweis keine Erwägungen in ihren Darstellungen zuliessen. Und in der Tat sind seine Bücher von einer Kargheit der Worte, die kaum überboten werden kann. „The Landau Style“ (old and new!) wurde zu seinen Lebzeiten viel diskutiert, bekämpft und imitiert. Trotzdem war Landau ein eindrucksvoller Lehrer für alle begabten Hörer und Leser. Er reizte bewusst seine Hörer und Leser nach den Motiven in seinen Darstellungen zu suchen. Er gab auch im Telegrammstil mit Ausrufungszeichen — natürlich nur in Klammern gesetzt — Hinweise für die Auflösung seiner Rätsel. Im Grunde respektierte er auch nur die, die seine Rätsel lösten und nicht die, die seinen Stil imitierten.

Sehen wir von so aussergewöhnlichen Bedingungen, wie sie bei Landau erfüllt waren, ab, so müssen wir sagen: Der Dozent der Anfängervorlesung ist zu Kompromissen gezwungen, wenn er zwei Bedingungen erfüllen will: 1. Nicht alle besseren unter den Hörern zu verjagen. Das tut er aber, wenn er sie sogleich in eine Axiomatik hineinführt, deren Sinn ihnen noch nicht aufgehen kann und in der sie nicht jene Spannung und Erhellung erkennen können, die sie mit ihrer jugendlichen Ungeduld erwarten.

2. Den Ansprüchen an wissenschaftliches Niveau zu genügen, das eine europäische Universität auf Grund des Beispiels unserer grossen Meister an ihre Dozenten stellen kann.

Den vorstehenden Ausführungen fehlt die Sinnhaftigkeit für denjenigen, der diese Problematik der Anfängervorlesung nicht anerkennt. Mit jemandem, der nur Mathematiker und nicht Lehrer sein will, kann man nicht über die zweckmässige Einrichtung der Vorlesung sprechen. Die ganze Schwierigkeit der Aufgabe, eine solche Vorlesung zu halten, eröffnet sich erst dem, der einerseits die verschiedenen Möglichkeiten des Aufbaues der Vorlesung vonseiten der Mathematik her sieht und der andererseits als Lehrer die psychologische Struktur des Publikums, das diese Vorlesung besucht, kennt und würdigt. Genau so entsteht der Problemkreis, den man die Didaktik der Anfängervorlesung nennt und der einen wesentlichen Teil der gesamten mathematischen Didaktik an den Hochschulen bildet.

Zur Beherrschung der Didaktik gehört neben einer guten Uebersicht über die mathematischen Möglichkeiten Erfahrung. Deshalb spottet auch Otto Toeplitz, [1]) der wie kein anderer sich über die beste Art, die Anfängervorlesung abzuhalten, Gedanken gemacht hat, in einem Vortrag auf dem Mathematikerkongress in Düsseldorf 1926 über die Fakultäten, die die Vorlesungen über Infinitesimalrechnung nach dem Motto verteilen: „Die Anfängervorlesung dem Anfänger".

Erkennt man die didaktische Aufgabe an, so sieht man sogleich eine ganze Reihe von Prinzipien, die beachtet werden müssen und die andererseits radikal durchgeführt, andere ebenso wichtige Prinzipien von der Beachtung ausschliessen. Da aber ein Kompromiss niemals logisch hergeleitet werden kann, kann er auch niemals zu der einen richtigen Art werden, wie man Infinitesimalrechnung lesen müsste. So haben sich auch immer neue Lösungsversuche abgewechselt. Die Geschichte der deutschen Vorlesungen in den vergangenen 60 Jahren spiegelt das besonders deutlich wieder.

Diese sich also teilweise widersprechenden Prinzipien möchte ich jetzt schildern.

I. *Der einheitliche Stil.* Niemand will in allen Töpfen kochen und an vielen Arten der Darstellung Anteil nehmen. Im Gegen-

---

[1]) Otto Toeplitz, « Das Problem der Universitätsvorlesung über Infinitesimalrechnung und ihre Abgrenzung gegenüber der Infinitesimalrechnung an den höheren Schulen », *Jahresbericht D. Math. Ver.* 36 (1927), p. 89.

teil hat jeder Dozent den Ehrgeiz, seine persönliche Art, mathematische Fragen zu betrachten, in allen Teilen der Darstellung konsequent zur Geltung zu bringen. Man will nicht teilweise streng und teilweise mit leichter Hand, nicht teilweise ganz abstrakt und teilweise rein anschaulich die Sätze begründen. Jeder Dozent will seine ureigene Vorlesung halten, die möglichst kein anderer liest. Das kann leicht zu dem führen, was Felix Klein als Purismus geisselte. Z. B. 1. Man spricht in den beiden Semestern nur von Ableitungen und auch nachdem die Funktionen mehrerer Veränderlichen behandelt sind, nicht von Differentialen. 2. Man spricht in der Infinitesimalrechnung niemals von Kurven und Tangenten, weil dies in die Geometrie gehöre. 3. Man kleidet alles in die ε, δ-Sprachweise und hütet sich vor Folgen wie $\lim f(x_n)$. Oder man macht das Gegenteil. 4. Bei den trigonometrischen Funktionen bringt man nicht ihre geometrische Bedeutung, obwohl sie den Hörern bis dahin nur als solche bekannt sind.

Als Meister des Purismus muss Edmund Landau gelten. Aus seinen Grundlagen der Analysis, erschienen 1930, und seiner Einführung in die Differential- und Integralrechnung, erschienen 1934, haben die deutschen Mathematiker, begonnen mit den Studenten mittleren Semesters und hinaufgehend bis zu den erfahrenen Professoren sehr viel gelernt. Scharfsinnig und geistreich muss man seine Bücher mindestens nennen. Bei seinen Vorlesungen kommt noch hinzu, dass er durch seine Vitalität den Hörer packen konnte. Aber Schule hat diese Art Infinitesimalrechnung zu lesen, nicht gemacht. Der Purismus ist ein zu grosses Hindernis. Die Physiker und selbst die Geometer, ja auch viele Mathematiker würden opponieren, wenn an ihrer Universität die Anfängervorlesung in der grossartigen Einseitigkeit der Landauschen Art gelesen würde.

Uebrigens gab es vor Landaus Zeiten schon einmal in der Analysis eine besondere Blüte des Purismus. Das war die Zeit, in der man Funktionentheorie ausschliesslich nach Weierstrass oder ausschliesslich nach Riemann las. Die heutige Generation kann überhaupt nicht mehr verstehen, wie es zu diesem Purismus kommen konnte. Wenn man eine vorgeschriebene Streçke zurücklegen soll, so schneidet man sich ja nicht erst ein Bein ab,

um darauf zu zeigen, dass man humpelnd das Ziel auch zu erreichen vermag.

II. *Dem Purismus entgegen gesetzt ist die Flexibilität*, die Beweglichkeit beim Aufbau einer mathematischen Theorie: Etwa die Bereitschaft, in der Analysis uneingeschränkt algebraische und geometrische Begriffe zu verwenden, das Bewusstsein, dass alle Teile der Mathematik zusammenhängen und die Kraft im Aufbau der Mathematik wesentlich verstärkt wird, wenn man stets alle Teile in ihrem Zusammenhang übersieht. Der grosse Meister der Flexibilität ist wieder Felix Klein. Er hatte ein besonderes Vergnügen daran, auf die Verbindung der verschiedenen Teile der Mathematik immer wieder hinzuweisen. Das galt für ihn als Forscher wie als Lehrer. In seiner Elementarmathematik vom höheren Standpunkt [1]) spricht er es für beide Bereiche überaus deutlich aus. 1911 hat Felix Klein noch einmal Infinitesimalrechnung gelesen, um seine Gedanken zur Fusion von Analysis, Algebra und Geometrie, vor allem aber zur Fusion der Raum- und Zahlvorstellung, wie er besonders hervorhebt, realisieren zu können.

Klein hatte kein Verhältnis zur Axiomatik. So fehlte ihm — obwohl er bewundernd dazu hinaufsah — jedes tiefere Verständnis für Hilberts Grundlagen der Geometrie [2]). Klein ermass also gar nicht, welche Schwierigkeiten es macht, Zahl und Raumbegriff logisch einwandfrei gleichzeitig in der Anfängervorlesung zu bringen. Das würde auf jeden Fall den üblichen äusseren Rahmen einer solchen Vorlesung sprengen. So hat — soweit ich sehe — Kleins Beispiel an den Universitäten (vielleicht im Gegensatz zu den Technischen Hochschulen, wo die logische Begründung nicht im gleichen Masse im Vordergrund steht) keine Nachahmung gefunden. Nur in den neuen Auflagen des sehr verbreiteten, umfangreichen Lehrbuches von v. Mangoldt-Knopp werden Raum und Zahl unmittelbar nacheinander schon im 1. Bande und noch vor der eigentlichen Infinitesimalrechnung axiomatisch behandelt. Nachdem dann auch noch die analytische Geometrie abgeleitet ist, kann man bei jeder passenden

---

[1]) Felix KLEIN, *Elementarmathematik vom höheren Standpunkt*, dritte Auflage, Berlin 1924-1928.

[2]) Siehe Hans FREUDENTHAL, « Die Grundlagen der Geometrie um die Wende des 19ten Jahrhunderts », *Math.-Phys. Semesterberichte VIII* (1960), pp. 2-25.

Gelegenheit im Aufbau der Infinitesimalrechnung auf die euklidische Geometrie zurückgreifen. So hat man einwandfrei die Kleinsche Forderung nach Fusion von Raum und Zahl durchgeführt. Aber das geschieht in einem sehr umfangreichen Buche und nicht in den Vorlesungen. Das aber ist ein gewaltiger Unterschied.

Heute — da wir unter dem Einfluss der Ideen von Bourbaki stehen — gibt es für das Streben, schon in einer solchen Anfängervorlesung den Blick der Studenten für das Gemeinsame in den verschiedenen mathematischen Disziplinen zu schärfen, andere kräftige Mittel. Nirgends ist mehr ein Stilbruch erforderlich, wenn Mengenlehre, Algebra und Topologie für die Vorlesung herangezogen werden sollen. Seitdem durch eine Entwicklung, die zumindestens Bourbaki ausgelöst hat, die verschiedenen Teile der Mathematik so nahe, wie sie es bisher nie gewesen waren, zusammen gebracht sind, stört der Uebergang von einem Zweige der Mathematik zu einem anderen nicht mehr den einheitlichen Stil. Infinitesimalrechnung wird von den heutigen Mathematikern immer mehr aufgefasst als eine spezielle Theorie, die aus einer Zusammenfassung von Algebra und Topologie folgt. Diese Konzeption geht (vielfach unbewusst) in den Aufbau der Vorlesungen ein und macht einen Exkurs in jene Gebiete so leicht.

III. *Das Prinzip der strengen Deduktion* bei allem, was vorgetragen wird, beachtet man seit Hilberts und Landaus Wirken weitgehend. Man muss sich dabei nur vergegenwärtigen, dass Strenge ein relativer Begriff ist. Weierstrass war lange das Muster an Strenge gewesen. Und doch musste er später Kroneckers scharfe Kritik an der Fragwürdigkeit der Grundlagen seiner eigenen Forschungen — nämlich schon am Gebrauche der reellen Zahlen — hinnehmen [1]). So ist Strenge der Definition und Beweisführung nicht zu definieren, sondern höchstens zu umschreiben.

Sicher sind keine Plausibilitätsbetrachtungen an Stelle von Beweisen gestattet, insbesondere nicht so logische Ungeheuer wie das Permanenzprinzip, das als Beweisprinzip auch nicht in Schulbüchern vorkommen darf. In der Anfängervorlesung zur Analysis gestattet die Strenge keine Anleihen aus der eukli-

---

[1]) Siehe die Briefe von Weierstrass an Sonja Kowalski, *Acta math. 39* (1922), p. 194 ff.

dischen Geometrie, da ja noch der Nachweis der Isomorphie der Zahlenebene R^2 und der euklidischen Ebene fehlt. Wird in der Infinitesimalrechnung von Punkten gesprochen, so handelt es sich immer um Elemente der Zahlenebene.

Bei der Aufforderung zu möglichst grosser Strenge bleibt noch offen, auf welcher Stufe die Axiome gewählt werden sollen. Das erfordert eine schwere Entscheidung der Dozenten. Am verbreitesten sind

1. die Peano Axiome,
2. die Axiome der rationalen Zahlen,
3. die Axiome der reellen Zahlen.

(Im letzteren Falle wird der Körper der reellen Zahlen charakterisiert als der geordnete, lokal kompakte Körper.)

Natürlich könnte man noch weiter als Peano zurückgehen und aus der Logik nach Dedekind oder Frege diese Axiome ableiten. Doch welche Zeit wird dafür verbraucht, und wie fremd müssen alle Ausführungen dem Anfänger erscheinen! Ernsthaft kommt ein solcher Beginn nicht in Frage. Auch ein Beginn mit den Peano Axiomen erscheint höchst problematisch — obwohl in Deutschland vielfach geübt. Dann muss nämlich der ganze Stoff von Landaus Grundlagen der Analysis dargestellt werden, bevor die eigentliche Infinitesimalrechnung beginnen kann. Ueberspringt man aber aus Zeitmangel auf diesem Wege einzelne Teile, etwa nur den Nachweis der kommutativen Gesetze für die natürlichen Zahlen oder die Klassenbildung zur Einführung der negativen oder der rationalen Zahlen, so ist nicht mehr einzusehen, was das ganze soll. Ausserdem ist eine solche Vorlesung schwerfällig — selbst in Landaus Buch ist dies trotz seiner grossen schriftstellerischen Fähigkeiten zu erkennen — und für Anfänger einfach nicht attraktiv zu gestalten. Gleiches scheint mir noch zu gelten, wenn man mit den rationalen Zahlen beginnt. Die Vorlesung ist dann auch gleich zu Anfang ausserordentlich schwer. Die irrationalen Zahlen sind dann als Dedekindscher Schnitt von rationalen Zahlen oder als Cantorsche Intervallschachtelung einzuführen statt schlicht durch ein Axiom zu charakterisieren wie im dritten Fall.

Dedekind weist im Vorwort von „Was sind und was sollen die Zahlen“ schon selbst darauf hin, dass sein Begriff des Schnittes schon bei Euklid steht. Sein Verdienst sei das Rechnen mit irrationalen Zahlen aus dem mit rationalen abgeleitet zu haben, etwa gezeigt zu haben, dass $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$.

Und das ist für den Anfänger zu schwer. Es bedeutet nämlich, dass der ganz junge Student schon begreifen muss, dass durch einen Schnitt eine reelle Zahl konstruiert wird. Und dann folgt notwendig etwas langatmig der Nachweis der Rechenregeln. Geht man aber von den Axiomen für die reellen Zahlen aus, so ist lediglich das Axiom zu besprechen, dass die reellen Zahlen durch einen Schnitt charakterisiert werden können.

So hat das Bemühen um möglichst tiefe Fundamentierung der Zahlen (was durchwegs auch als eine Konsequenz der Forderung nach Strenge aufgefasst wird) auch seine Gefahren. Es kann zu Schwerfälligkeit und Langatmigkeit bei Definitionen und Beweisen führen und vor allem die Uebersicht über den ganzen Aufbau gefährden. Verbringt man ein ganzes Semester mit der Einführung der reellen Zahlen und Folgen, so erstickt man das Interesse der Hörer, die ja mit dem Verlangen nach grossen Erkenntnissen gekommen sind, dies aber bei noch so grossen Bemühungen des Vortragenden als Tiffteleien empfinden.

So beginnen die meisten Dozenten in Deutschland mit einem Axiomensystem für reelle Zahlen — heute nach der Algebraisierung der gesamten Mathematik meisten mit Charakterisierung der Gesamtheit der reellen Zahlen als einem geordneten, lokal kompakten Körper. Vielfach wird auch vorher Gruppe und Ring besprochen, sodass die Infinitesimalrechnung mit einer Strukturtheorie der Algebra beginnt. Diese Entwicklung war unvermeidlich. Die Einheitlichkeit und Klarheit wird so gefördert. Auch wird der Anschluss an die höheren Vorlesungen besser vorbereitet.

Ganz entsprechendes gilt für das Eindringen der Topologie in die Anfängervorlesungen. Eine ganz natürliche Einführung in die Punktmengen-Topologie ergibt sich bei der Behandlung der Funktionen mehrerer Veränderlichen — also im 2. Semester. Da müssen offene und abgeschlossene Mengen behandelt werden. Es ergibt sich ganz naturgemäss die Besprechung der Axiome des Hausdorffschen Raumes. Seit Carathéodorys Wirken spielt auch

der Satz von Heine-Borel in den Vorlesungen eine grosse Rolle. So liegt es auch nahe, den Begriff „kompakt“ einzuführen und dabei dann notwendig auf die Sprachverwirrung zu sprechen zu kommen, die seit 10 Jahren hier herrscht. Wir sprechen von „folgenkompakt“, wenn wir den Begriff im klassischen Sinne von Alexandroff-Hopf meinen und von „überdeckungskompakt“, wenn wir den Bourbakischen Begriff „kompakt“ meinen.

Aber selbstverständlich darf die Vorlesung über Infinitesimalrechnung weder in eine Vorlesung über Algebra noch in eine über Topologie ausarten. Es kommt nur darauf an, den Sinn der Hörer für diese Gebiete zu öffnen und von der vor allem durch Bourbaki erreichten Vereinheitlichung der Mathematik und Straffung der Beweise Nutzen zu ziehen.

Beides tut man weitgehend dadurch, dass man an den passenden Stellen die Begriffe algebraisiert bzw. topologisiert und die mengentheoretischen Grundbegriffe ganz an den Anfang setzt. Ist der Funktionsbegriff eingeführt — und das möglichst weit vorne — so folgen die Begriffe injektiv, surjektiv und bijektiv. Sie kommen heute in vielen Anfängervorlesungen vor, obwohl sie noch ganz jungen Datums sind. Sie dienen wesentlich der Vereinheitlichung und Klarheit der Darstellung.

IV. Einheitlicher Stil und streng logischer Aufbau sind Forderungen, die ganz evident klingen und denen explizit niemand widersprechen wird. Und dennoch hat es einen sehr angesehenen Mathematiker in Deutschland gegeben, der alle didaktischen Probleme sehr ernst nahm, der aber gewisse Vorbehalte zu diesen Forderungen aufstellte. Das war Otto Toeplitz, Schüler von Felix Klein und David Hilbert, der als Dozent von 1907 bis 1935 in Deutschland sehr segensreich wirkte. Er hat diese Vorbehalte in seinem Vortrag: „Das Problem der Universitätsvorlesungen über Infinitesimalrechnung und ihre Abgrenzung gegenüber der Infinitesimalrechnung an den höheren Schulen“ auf der Naturforschertagung in Düsseldorf 1926 begründet[1]). Er hat dort die *genetische Methode* für die Vorlesungen empfohlen. So schreibt er: „Das herrschende Ideal ist die letzte objektive Fundierung der Mathematik auf ein letztes Axiomensystem, aus dem alles der Reihe nach sozusagen selbstverständlich, zwangs-

[1]) A. a. O. 1).

läufig herausfällt." „Ich halte diesen Weg, das wahre Fundament der Mathematik zu suchen, für eine Chimäre." „Ich möchte diesem Weg, den schon Plato skizziert hat, die schöne Denkweise seines Schülers Aristoteles entgegensetzen, der mit grösstem Fleiss überall zusammenstellt, wie die Denker vor ihm gedacht haben und wie aus solchen Betrachtungen sich bessere Ansätze zu allgemeinen Normen gewinnen lassen, als sie an sich geläufigsind."

So will Toeplitz verhindern, dass die grossen Entdeckungen früherer Jahrhunderte nebenbei als Spezialfälle im Vorlesungsstoff abfallen. Im Gegenteil sollen die Hindernisse, die oft lange Zeit diesen Entdeckungen entgegenstanden, herausgehoben und so die Spannung in der Vorlesung erhöht werden. Zugleich wird damit die Wichtigkeit der in den Vorlesungen behandelten Aussagen unterstrichen. Bei dieser Art des Vortrages wird ein natürlicher Sinn für die Geschichte unserer Wissenschaft und damit auch für die Einbettung der Mathematik in die gesamte Kulturgeschichte erweckt.

Es wird zweifellos so auch einem verbreiteten Uebel begegnet: Dem Mangel an Ehrfurcht vor den Leistungen unserer grossen Geister. Das ist eine Erscheinung, die sich allzu breit unter unserer Jugend macht, sofern sie nur axiomatisch aufgebaute Vorlesungen hören. Und es ist wahrhaft eine Barbarei, wenn ein Fachmann seine Wissenschaft kulturhistorisch nicht einordnen kann.

Am besten ist Toeplitz zweifellos die Durchführung seines Programms bei der Darstellung des Umkehrsatzes der Differentialrechnung gelungen[1]). Da schildert er wie Barrow, der Lehrer von Newton, eigentlich schon die ganze Differential- und Integralrechnung hat. Und doch wird erst Newton als Entdecker der Infinitesimalrechnung genannt, denn ihm erschloss sich erst, wie man unbestimmte Integrale irgendwelcher Rechenausdrücke erlangt und so mit den Integralen numerisch rechnen kann. Newton erkannte erst das, was man in einem naiven Zustand auch heute noch das Integrieren nennt. Das ganze 18. Jahrhundert herrscht dann der rechnerische Funktionsbegriff und ist die Unterlage für die vielen neuen Ergebnisse.

---

[1]) Siehe Otto Toeplitz, « Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung », *Die Grundlehren der math. Wiss. Bd.* 1949.

Wer das schmale Buch von Toeplitz liest, wird von der geistigen Harmonie, die hier zwischen mathematischem, geschichtlichem und philosophischem Verständnis waltet, in den Bann geschlagen. Und doch muss man sich fragen, ob man dieses Buch als Vorbild für eine Anfängervorlesung ansehen kann. Sicher kann man eine solche geschichtliche Darstellung nicht nachahmen wollen, wenn man nicht in dieser historischen Welt lebt. Sehr ins Gewicht fällt, dass der straff logische Aufbau durch solche Betrachtungen unterbrochen, ja geknickt wird. Manche Probleme müssen dann mehrmals, nämlich auf verschiedenen Stufen der Erkenntnis behandelt werden. Das prägt sich dem Hörer viel tiefer ein. Und wer diese Vorlesung über Infinitesimalrechnung von Toeplitz gehört hat, blieb sein Lebtag unter diesem Eindruck. Aber diese Vorlesung kostet sehr viel Zeit! So hat auch Toeplitz' Buch trotz seines grossen Ansehens keinen erheblichen Einfluss auf die deutschen Anfängervorlesungen gehabt. (Dagegen beeinflusst es sichtlich den deutschen Schulunterricht.)

Einen grossen Anteil an den Erwägungen über die geeignete Gestaltung der Vorlesungen zur Infinitesimalrechnung hat immer die Frage der *Anschaulichkeit* der Darstellung eingenommen. Alle Modernisierung ist zunächst von den Gegnern als unanschaulich getadelt worden. Was aber heisst anschaulich? Etwa alles geometrisch ausdrücken zu wollen — angefangen mit der Zahlenfolge als Punktfolge, fortgesetzt mit dem Differentialquotienten als Tangens des Richtungswinkels der Tangente und der Einführung des Integrals als Inhalt eines Flächenstückes — verwirrt den logischen Aufbau, wenn nicht diese Interpretation als Exkurs ausdrücklich zusätzlich geschieht. Geschieht dies aber nicht einmal ausdrücklich, so wird die Mindestanforderung an logischer Begründung nicht erfüllt. Was ist jetzt noch ein Beweis? Auch gibt es manche Fälle, wo eine Interpretation im Rahmen der euklidischen Geometrie die Sachlage nur kompliziert.

Schliesslich ist daran zu denken, dass die abstrakten Begriffe und Sätze ihren Kennern nicht unanschaulich bleiben müssen. Unanschaulichkeit ist etwas Relatives. Die Anschaulichkeit eines abstrakten Kalküls kann für den Eingeweihten beinahe von optischer Art sein. Und die Verwendung von Begriffen, die in der euklidischen Geometrie kein Modell haben, wird immer nur

von der alten Generation angegriffen. Junge Menschen stört meistens die Abstraktheit einer Theorie nicht. Nach einem geeigneten Vortrag und etwas Uebung können sie alles als anschaulich empfinden. Ich habe schon häufig verwundert aufgeschaut (und war geneigt, misstrauisch zu sein), wenn ein guter Student den aufgegebenen Stoff so ungewöhnlich abstrakt vortrug. Niemand hatte ihn dazu aufgefordert. Die Jugend hat einen ausgesprochenen Hang zum abstrakten Denken.

Von dem Appell an die Anschaulichkeit scheint mir nur wirklich ernst zu nehmen zu sein die Forderung der *Eindringlichkeit* des Vortrages und der genügenden Uebung für den Lernenden, um die notwendige Uebersicht und Flexibilität im Gebrauche des Erlernten zu gewinnen — eben das ist das einzig Objektive an der Anschauung. So ist es zumindestens seitdem Einstein die Vormachtstellung der euklidischen Geometrie gebrochen hat. Zum inneren Spannungsfeld unserer Anfängervorlesung gehört nun noch die Entscheidung über die Auswahl aus der erdrückenden Fülle des Stoffes.

Der äussere Rahmen, Anzahl der zur Verfügung stehenden Stunden und Auffassungsvermögen der Studenten sind für längere Zeiten unveränderlich. Es gibt viel Stoff, auf dessen Darstellung nicht verzichtet werden kann, weil die Studenten nach dem 2. Semester beginnen, theoretische Physik zu studieren, weil sie ferner die verschiedenen Kursusvorlesungen der Mathematik besuchen müssen. Andererseits haben die meisten Dozenten, insbesondere die jungen, die Tendenz, etwas Besonderes, bisher nicht Uebliches zu bieten. Und die Universität leitet ihre Existenzberechtigung davon ab, dass immer von der Forschung Einfluss auf die Gestaltung der Vorlesung genommen wird. So gilt es, einen echten Kompromiss zu schliessen. Die Vorlesung ist kein Experimentierfeld. Es handelt sich um die wertvolle Zeit unserer Hörer, die nicht einfach bei Misslingen der Vorlesung diese zum zweiten Male hören können. Es gilt auch die Liebe zum Studium bei den Hörern zu wahren. Da ist weder abgestandenes Dörrgemüse noch unfertiges Gericht am Platze.

Wir haben bei unseren Entscheidungen über die Gestaltung der Vorlesung eine ähnliche Verantwortung wie der Direktor einer Universitätsklinik. Es sind zur Heilung die neuen wirk-

samsten Mittel zu nehmen, sofern die Ungefährlichkeit genügend ausprobiert ist. In dieser Forderung steckt ein Widerspruch, der gesehen werden und nach Möglichkeit aufgelöst werden muss. Hier liegt die wesentliche Leistung des Klinikdirektors.

Analog ist es bei uns. Extravaganzen müssen im Interesse des Anschlusses der Vorlesung an die Literatur und die später folgenden Vorlesungen anderer Dozenten vermieden werden. Es dürfen auch nicht etwa Konvergenzkriterien oder mehrfache Integrale fortgelassen werden, weil man sie als „altes Eisen" erklärt. Aber auch terminologische Abweichungen grösserer Art sollten vermieden werden. Vielleicht kann man sich auf gleichmässige Konvergenz beschränken, aber man darf diese Art der Konvergenz nicht schlechtweg Konvergenz nennen. Man darf sich nicht auf Abelsche Gruppen beschränken und diese dann Gruppen nennen. Man darf im Interesse der Hörer einen Vektor nicht Zeiger nennen usw. So etwas schafft Verwirrung.

Und nun wird man einen Katalog der Dinge erwarten, die unbedingt in eine solche Vorlesung gehören. So etwas müsste es trotz der Lehrfreiheit (auf die man in Deutschland sehr pocht) geben, denn es handelt sich ja ganz wesentlich um das Wohl der Hörer. Aber gerade weil der Schreiber dieser Zeilen eine solche verbindliche Minimalliste für sinnvoll hielte, möchte er nicht versuchen, sie hier aufzustellen. Nur eins sei hier noch gesagt: Die zweisemestrige Vorlesung muss bis zu den Transformationsformeln für mehrfache Integrale reichen, also zweckmässig bis zum Begriff der Orientierung und den alternierenden Differentialformen. Das ist ein weiter Weg, wenn man bedenkt, dass in den ersten Stunden zunächst einmal erst die logischen Schlüsse und Wendungen eingeübt werden müssen. Will man nicht in den letzten Wochen in eine unerträgliche Hetzjagd geraten, so muss während des ganzen Jahres der Stoff genau eingeteilt werden. Und immer muss daran gedacht werden, dass es sich um eine Einführung für die Anfänger und um die Vorbereitung der weiterführenden Vorlesungen in der Mathematik und theoretischen Physik handelt.

Mathematisches Institut
Universität Münster (Westf.).