

# I. Historische Bemerkungen zur Entwicklung des Funktionsbegriffs.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **8 (1962)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.04.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# DIE BEHANDLUNG DES FUNKTIONSBEGRIFFS IN DER HÖHEREN SCHULE <sup>1)</sup>

VON H. G. STEINER,

## I. *Historische Bemerkungen zur Entwicklung des Funktionsbegriffs.*

1. Die Beantwortung der Frage, wann in der Geschichte der Mathematik zum erstenmal Funktionen betrachtet wurden, hängt natürlich davon ab, welche Definition des Funktionsbegriffs man zugrundelegt. Verwendet man eine moderne Fassung, nach der auch eine endliche Wertetafel (die gewissen Voraussetzungen genügt) eine Funktion darstellt, so kann man sagen, dass bereits die Babylonier, die ja über eine ganze Reihe von Tabellen, z.B. von Quadratzahlen, von aufgehenden Quadrat- und Kubikwurzeln usw., verfügten, sich mit Funktionen beschäftigt haben. Es wäre dann billig, mit dieser Feststellung gegen die bekannte These angehen zu wollen, der Funktionsbegriff sei etwas typisch Neuzeitliches. Das hiesse, die ganze Problematik, die mit dem neuzeitlichen Funktionsbegriff verbunden ist, zu verkennen und zu bagatellisieren. Was nämlich mit der genannten These gemeint ist, betrifft, vom heutigen Standpunkt aus gesehen, nicht nur den Begriff der Funktion, sondern zugleich auch den Begriff des reellen Kontinuums, um den man bis in die zweite Hälfte des vorigen Jahrhunderts hat ringen müssen. In dieser ursprünglichen *Verbindung mit dem Kontinuumsbegriff* setzt die Geschichte des Funktionsbegriffs in der Tat erst ein. Es ist eine Verbindung, die die Bemühungen um eine klare Fassung des Funktionsbegriffs ausserordentlich erschwert hat.

2. Die Funktionenlehre war zunächst *geometrisch* orientiert. Oresme, Galilei, Cavalieri und Barrow sind hier zu nennen. Durch

---

<sup>1)</sup> Erweiterte Fassung eines Vortrags, gehalten am 27.6.61 anlässlich des JCMI-Seminars in Lausanne.

Galilei war insbesondere die Methode entwickelt worden, die zur Beschreibung von gewissen Bewegungen geeigneten Funktionen graphisch zu erfassen und zu analysieren. Es gelang ihm z.B., die Weg-Zeit-Kurve für den freien Fall aus dem Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm graphisch herzuleiten. Unter dem Einfluss der Gleichungslehre Viëtas und der Analytischen Geometrie von Descartes wurde dem geometrischen dann ein *rechnerischer Funktionsbegriff* an die Seite gestellt. Er wurde die Grundlage des von Newton und Leibniz begründeten Infinitesimalkalküls und war noch im ganzen 18. Jahrhundert vorherrschend. In Newtons «*Methodus fluxionum*» findet man folgende Erklärungen: <sup>1)</sup> «Nun werde ich im folgenden Fluents diejenigen Grössen nennen, die ich als gradweise und unbegrenzt wachsend betrachte, und ich werde sie darstellen durch die letzten Buchstaben des Alphabets  $u, x, y$  und  $z...$  Die Geschwindigkeiten aber, mit denen die einzelnen Fluents durch die sie erzeugende Bewegung vermehrt werden — die ich Fluxionen nenne — werden durch dieselben Buchstaben mit einem Punkt dargestellt.» Ein wichtiges Problem der *Fluxionenlehre* besteht nun nach Newton darin: «Wenn die Beziehung, die zwischen den Fluents besteht, gegeben ist, die Beziehung zwischen den Fluxionen zu bestimmen.» Im Sinne Newtons ist eine Funktion also eine Beziehung zwischen Fluents <sup>2)</sup>. Was Fluents sind, wird bei Newton nicht deutlich gesagt <sup>3)</sup>. Es wird auch nicht genau angegeben, von welcher Art die Beziehungen sein sollen; im allgemeinen wird an Gleichungen mit gewissen einfachen Termen gedacht.

Die Newtonsche Umschreibung des Funktionsbegriffs wurde akzeptiert und ist unter Ersetzung des Wortes «Fluente» durch «veränderliche Grösse» oder «Veränderliche» bis heute noch anzutreffen. Wegen der mangelhaften Erklärung des Begriffs «Fluente» hat sich dabei vielfach, insbesondere in der Schul-

---

<sup>1)</sup> Isaac NEWTON, *Methodus fluxionum et serierum infinitarum*, zitiert nach O. BECKER, *Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung*, Freiburg/München, 1954, p. 149.

<sup>2)</sup> Die Bezeichnung «Funktion» findet sich nicht bei Newton; sie geht auf Leibniz und Joh. Bernoulli zurück.

<sup>3)</sup> Jedenfalls denkt Newton zunächst an physikalische Grössen. K. Menger hat in diesem Sinne eine Präzisierung der Fluents durch die Deutung als physikalische Zustandfunktionen gegeben. Siehe K. MENGER, *Calculus, a modern approach*, Ginn and Company, New York, 1955, und K. MENGER, *An axiomatic theory of functions and fluents*, in: *The axiomatic method*, Amsterdam, 1959.

mathematik, die unhaltbare Vorstellung gebildet, als gäbe es im Bereich der reinen Mathematik so etwas wie veränderliche Größen. Im Rahmen der Schulmathematik erscheinen in der Tat der Kontinuums- und der Funktionsbegriff noch heute in dieser eigentümlichen, nicht analysierten Verquickung.

3. Auch zur Zeit Eulers ist man in der Frage des Funktionsbegriffs noch nicht weitergekommen. Bei Euler <sup>1)</sup> findet sich die auf Joh. Bernoulli zurückgehende Erklärung, dass eine Funktion einer Zahlenvariablen ein *analytischer Ausdruck* sei, der aus dieser Zahlenvariablen und aus Zahlzeichen aufgebaut ist. Was er unter einem analytischen Ausdruck versteht, hat Euler nicht näher ausgeführt. Bemerkenswert ist, dass Euler nicht die Beziehung oder Zuordnung, die durch den analytischen Ausdruck gegeben ist, sondern den analytischen Ausdruck selbst als Funktion bezeichnet. Dadurch kommt eine weitere begriffliche Belastung herein: die mangelhafte Unterscheidung zwischen einer Funktion und einem Zeichen für die Funktion wie auch die mangelhafte Unterscheidung zwischen Funktion und Funktionswert.

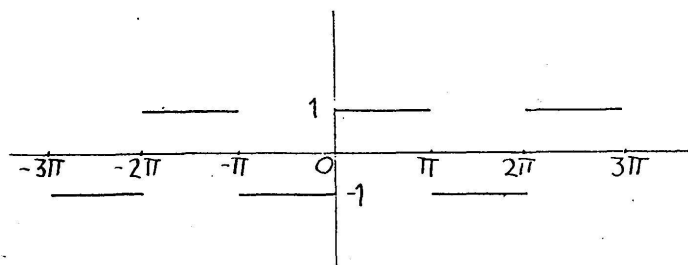


Fig. 1.

Aus der Mathematik seiner Zeit lässt sich erschliessen, was Euler mit einem analytischen Ausdruck gemeint haben mag. Es sind dies Polynome, Polynomquotienten, Wurzelausdrücke, ferner Reihenentwicklungen, die man mit Hilfe rationaler Ausdrücke erhielt. Neben diesen Operationen waren aber auch noch die Differentiation und die Integration zugelassen, so dass die elementaren transzendenten Funktionen mit erfasst waren. Mit solchen Hilfsmitteln glaubte man nun, nur Kurven mit gewissen Stetigkeitseigenschaften, sog. «*curvae continuæ*»,

<sup>1)</sup> L. EULER, *Introductio in analysin infinitorum*, Bd. I, Kap. I.

erfasst zu haben. Es schien auf keine Weise möglich, ein « Flickwerk », wie Figur 1 es zeigt, durch einen analytischen Ausdruck darzustellen. Durch die Untersuchungen Fouriers (um 1800) erlitt diese Auffassung jedoch eine schwere Erschütterung. Es war in der Tat möglich, mit den zugelassenen Mitteln solche irregulären Gebilde darzustellen, z.B. das obige durch die *Fourier-Reihe*

$$\frac{4}{\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin (2 \nu + 1) x}{2 \nu + 1}.$$

Ferner hatte Dirichlet entdeckt, dass man durch mehrfachen Grenzübergang aus stetigen Funktionen sogar überall unstetige Funktionen bilden konnte, z.B.:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \text{ rational} \\ 0, & \text{falls } x \text{ irrational} \end{cases} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \lim_{k \rightarrow \infty} (\cos^2 n! \pi x)^k \right)$$

4. In seinen Arbeiten über Fourier-Reihen hat Dirichlet dann eine neue Definition des Funktionsbegriffs benutzt, die sich gegen den Widerstand der älteren Generation (Cauchy, Poisson, Laplace) allmählich durchsetzte. In einer von Hankel stammenden Version lautet diese: Eine Funktion  $y$  von  $x$  liegt vor, wenn jedem Wert der veränderlichen Grösse  $x$  innerhalb eines gewissen Intervalles ein bestimmter Wert der veränderlichen Grösse  $y$  entspricht, unabhängig davon, ob sie in dem ganzen Intervall nach demselben Gesetz von  $x$  abhängt oder nicht, oder ob die Abhängigkeit durch mathematische Operationen ausgedrückt werden kann oder nicht. Diese Definition in mehr oder weniger abgewandelter Form ist bis heute noch anzutreffen und findet sich auch in unseren Schulbüchern, häufig jedoch mit der vollkommen unbrauchbaren Ausweitung, dass nicht notwendig je genau ein Wert zugeordnet wird, sondern mehrere Werte zugelassen sind.

Mit der Aufstellung des *Dirichletschen Funktionsbegriffs*, die den alten geometrischen Funktionsbegriff wieder stärker in den Vordergrund stellte, war man nun zwar aus gewissen Schwierigkeiten herausgekommen, die mit den älteren Definitionen verbunden waren, es stellte sich aber bald heraus, dass man für den

Aufbau der Differential- und Integralrechnung und der komplexen Funktionentheorie eigentlich nichts gewonnen hatte. Hier fehlte der Begriff der integrierbaren, der stetigen, der differenzierbaren, der analytischen Funktion. So beschrieb denn H. Hankel (1870) in einer historischen Analyse zum Funktionsbegriff<sup>1)</sup> die vorliegende Situation folgendermassen: « Es ist eine empfindliche Lücke in den analytischen Fundamentalbegriffen entstanden, die, obgleich sie überall mit Stillschweigen übergangen wird, doch nicht minder vorhanden ist, wie ein Blick selbst auf die besseren Lehrbücher der Analysis lehrt. Das eine definiert die Funktionen wesentlich im Eulerschen Sinne, das zweite verlangt,  $y$  solle sich « gesetzmässig » mit  $x$  ändern, ohne dass eine Erklärung dieses dunklen Begriffes gegeben ist, das dritte definiert sie in der Weise Dirichlets, das vierte gar nicht; alle aber leiten aus ihrem Begriffe Folgerungen ab, die nicht in ihm enthalten sind. »

5. Die hier von Hankel aufgewiesene Lücke wird nun jedoch in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts geschlossen. Nachdem Cauchy schon um angemessene Definitionen bemüht gewesen war, sind es vor allem Riemann und Weierstrass, die der *komplexen Analysis* ihr begriffliches Fundament gegeben haben, indem sie einerseits den Begriff der komplexen Differenzierbarkeit, andererseits die Entwickelbarkeit in eine Potenzreihe in den Vordergrund stellten, zwei Definitionen, die sich für den Aufbau der Funktionentheorie als äquivalent erwiesen.

Doch kehren wir noch einmal zum Dirichletschen Funktionsbegriff zurück. War er für gewisse Zwecke der Analysis zu allgemein, so erwies er sich gegenüber der Gesamtentwicklung der Mathematik als zu eng. Mit dem Fortschreiten der Mathematik in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts traten nämlich neben den reellen und komplexen Zahlen auch andere Objekte in den Vordergrund und neue Mengen, zwischen denen *Zuordnungen* hergestellt und untersucht wurden. Allein Grassmann hatte mit seinen Vektoren und Gebilden höherer Stufe eine ganze Welt von neuen Objekten geschaffen; hinzu kamen die Quaternionen

<sup>1)</sup> Enthalten in der Arbeit « Untersuchungen über die unendlich oft oszillierenden und unstetigen Funktionen », Oswalds Klassiker, pp. 44-50.

Hamiltons und andere sog. hyperkomplexe Systeme. Der Funktionsbegriff musste erweitert werden: Man führte Quaternionenfunktionen, Vektorfunktionen, Tensorfunktionen usw. ein, so wie man vorher auch schon z.B. zahlentheoretische Funktionen und komplexe Funktionen neben den auf einem reellen Intervall definierten reellwertigen Funktionen betrachtet hatte.

6. Eine volle Allgemeinheit wurde aber erst bei Cantor erreicht, der in seiner *Mengenlehre* beliebige Mengen durch Zuordnung ihrer Elemente in Beziehung setzte. Unter dem Gesichtspunkt der allgemeinen Mengenlehre trat jetzt mit einemmale die fundamentale Bedeutung des Funktionsbegriffs für die gesamte Mathematik in Erscheinung. In den «Grundzügen der Mengenlehre» von Hausdorff (1914) kommt die allgemein-mengentheoretische Auffassung des Funktionsbegriffs voll zum Ausdruck. Eine Funktion wird definiert als eine *Zuordnung*, durch die jedem Element einer Menge  $X$  genau ein Element einer Menge  $Y$  zugewiesen wird. Fasst man die Elemente aus  $X$  mit den ihnen in  $Y$  zugeordneten Elementen zu geordneten Paaren zusammen, so ist eine Funktion auf  $X$  mit Werten in  $Y$  auch gegeben durch eine entsprechende *Paarmenge*, die eine Teilmenge der Produktmenge  $X \times Y$  ist.

Wir sehen hier, wie sich der Funktionsbegriff endlich ganz vom reellen Kontinuum gelöst hat. Von veränderlichen Größen ist keine Rede mehr. Die Mengen  $X$  und  $Y$  können jetzt auch endliche Mengen sein, auf ihnen braucht keine Ordnung erklärt zu sein, und schon garnicht brauchen sie die Eigenschaften des reellen Kontinuums zu besitzen. Erst durch vollkommen überschaubare Spezialisierungen kommt aus diesem allgemeinen Begriff z.B. der Begriff der auf einem reellen Intervall stetigen reellen Funktion oder der komplex-analytischen Funktion heraus.

In der Mathematik des 20. Jahrhunderts hat sich diese allgemeine Auffassung des Funktions- und des damit gleichwertigen Abbildungsbegriffs durchgesetzt. Sieht man sich neuere Lehrbücher zur Topologie oder Algebra an, so bringen sie in einem ersten Kapitel mengentheoretische Begriffe, zu denen heute selbstverständlich auch der Funktions- und Abbildungsbegriff gehört. Man kann in einer methodologischen Analyse

der modernen Mathematik vielleicht drei Hauptbegriffe herausarbeiten: den Begriff der Menge, den Begriff der Struktur und den Begriff der Abbildung oder Funktion. Mit diesen Begriffen war es möglich, in die während der zweiten Hälfte des vorigen Jahrhunderts ziemlich unübersichtlich gewordene Werkstatt des Mathematikers eine neue Ordnung zu bringen, mit der sich nun Material, Werkzeug und Verfahrensweisen, derer der Mathematiker sich bedient, in einfacher Weise überblicken lassen. Es war mit diesen Begriffen ferner möglich, das Verhältnis der Mathematik zu ihren Anwendungen, zu denen gerade in der letzten Jahrzehnten ganz neuartige Gebiete hinzugetreten sind, in bestimmten einheitlichen Grundvorstellungen zu erfassen und damit besser zu beherrschen <sup>1)</sup>).

## II. *Der Funktionsbegriff im mathematischen Unterricht.*

Die Frage nach der angemessenen Behandlung der Funktionenlehre in der Schule kann nicht gründlich erörtert werden, ohne die zuletzt getroffenen Feststellungen zu beachten. Es geht dabei vor allem um zweierlei: erstens erscheint es als notwendig, auch in der Schule die heutige mathematische Auffassungsweise in gebührender Masse wiederzugeben; zweitens wird man vom Fortschritt der Wissenschaft, der sich hier auf die Klärung von Grundbegriffen bezieht, auch didaktische Erleichterungen und Verbesserungen erwarten können. Wie ein Blick in unsere Schullehrbücher zeigt, hat die neuere Entwicklung in der Schule bisher jedoch kaum einen Niederschlag gefunden. Alle antiquierten Versionen sind noch lebendig:

- a) der unklar gelassene Begriff der veränderlichen Grösse und die dadurch gegebene Vermengung mit dem Kontinuumsbegriff,
- b) die Auffassung der Funktionen als Beziehungen zwischen sog. veränderlichen Grössen ohne Eindeutigkeitsforderung,
- c) die Gleichsetzung von Funktion und Kurve in der Zahlenebene,

---

<sup>1)</sup> Siehe hierzu H. G. STEINER, Das moderne mathematische Denken und die Schulmathematik, *Der Mathematikunterricht*, 1959, Heft 4.