

V. Densité d'empilement de sphères: LE RÉSULTAT DE BLICHFELDT.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **8 (1962)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

a ses coefficients entiers, mais est rationnellement indécomposable (les a_{ij} sont donc des nombres algébriques) et si $f(1, 0, \dots, 0) = 1$ le théorème du produit montre que pour un entier $h \neq 0$ convenable l'équation $f(x_1, \dots, x_n) = h$ a une infinité de solutions en entiers x_1, \dots, x_n . Si en outre $f(1, 0, \dots, 0) = 1$ on peut déduire de deux solutions entières congrues mod h , une solution de $f(x_1, \dots, x_n) = 1$ qui a ainsi une infinité de solutions. C'est la généralisation à n variables du résultat (B) sur l'équation de Pell-Fermat ¹⁾.

V. DENSITÉ D'EMPILEMENT DE SPHÈRES: LE RÉSULTAT DE BLICHFELDT.

Mais revenons aux formes quadratiques définies. Le résultat de Minkowski, $\gamma_n \leq n$, qui surpasse tous ses contemporains par la simplicité et la généralité de la méthode de majoration utilisée, n'est en fait que la traduction du résultat intuitif que, dans un empilement $(A + \vec{g}, \vec{g} \in G)$ le quotient de l'espace occupé par l'empilement à l'espace total est ≤ 1 . Tel quel bien entendu l'énoncé n'est pas correct puisque l'espace entier et l'espace occupé par l'empilement sont infinis, il faut se restreindre à un domaine $|x_1| \leq l, \dots, |x_n| \leq l$, et étudier ce qui se passe quand l croît indéfiniment. On obtient alors comme limite du quotient, que nous appellerons la *densité de l'empilement*, $\text{mes}(A)/\text{dét } G$. Ne peut-on améliorer cette majoration triviale: densité de l'empilement ≤ 1 ? Il ne peut être question de l'améliorer pour un ensemble A quelconque, même si c'est une jauge, car si A est par exemple le cube défini par les inégalités

$$-\frac{1}{2} < x_1 < \frac{1}{2}, \dots, -\frac{1}{2} < x_n < \frac{1}{2},$$

l'empilement $(A + \vec{g}, \vec{g} \in \mathbb{Z}^n)$ recouvre l'espace, à un ensemble de mesure nulle près, donc la densité de l'empilement est égale à 1.

¹⁾ Comme les résultats sur l'équation de Pell sont équivalents à des résultats sur les « unités » du corps quadratique engendré par \sqrt{d} , les résultats sur l'équation $f(x_1, \dots, x_n) = 1$ sont équivalents à des résultats sur les unités d'un corps de nombres algébriques de degré n , associé à f . Le cas considéré ici correspond aux corps dont tous les conjugués sont réels. Le cas général peut être traité à partir d'une extension du théorème sur les formes linéaires au cas des coefficients complexes.

Dans le cas des boules, BLICHFELDT (1914) est arrivé à un résultat remarquable: dans l'espace à n dimensions, la densité d'un empilement de boules $(B + \vec{g}, g \in G)$ a une densité toujours $\leq (n+2)/2(\sqrt{2})^n$. Ce résultat n'a pas été très sensiblement amélioré depuis; par ailleurs, il ne pourrait l'être que d'une façon limitée, car on a démontré qu'il y a des empilements de boules de densité $\geq 1/2^{-n+1}$, résultat valable d'ailleurs pour toute jauge. (HLAWKA, 1944.)

Ce dernier résultat peut s'obtenir facilement à partir d'un théorème de moyenne dû à MAHLER, très analogue au théorème de Minkowski-Blichfeldt démontré précédemment, qui, lui, permet de démontrer la majoration de Blichfeldt. Nous nous contenterons de démontrer le résultat suivant: la densité des empilements de boules est $\leq (n+1)/(\sqrt{2})^n$.

On démontre d'abord par une récurrence facile que si dans R^n , H est un système de $n+2$ points donnés, pour un point P quelconque de l'espace, il y a au moins une paire de points A, B de H tels que $\widehat{APB} \leq \pi/2$. (En effet, si les produits scalaires $\langle \vec{PX}, \vec{PY} \rangle$, $X \in H$, $Y \in H$, $X \neq Y$, étaient tous < 0 , les projections sur l'hyperplan Π perpendiculaire à PA en P (A étant un élément arbitraire pris dans H) des points de H différents de A , formeraient dans cet espace à $n-1$ dimensions un système H' de $n+1$ points distincts avec $\langle \vec{PX}', \vec{PY}' \rangle < 0$, $X' \in H'$, $Y' \in H'$, $X' \neq Y'$; et en itérant on aurait trois points distincts L, M, N sur une droite passant par P et tels que $\langle \vec{PL}, \vec{PM} \rangle$, $\langle \vec{PM}, \vec{PN} \rangle$ et $\langle \vec{PN}, \vec{PL} \rangle$ soient tous négatifs, ce qui est évidemment impossible.)

Soit alors un empilement $\{B + \vec{g}, \vec{g} \in G\}$ de boules, de rayon 1 pour fixer les idées, alors les centres de deux boules distinctes quelconques de l'empilement ont une distance ≥ 2 . Il résulte alors du lemme précédent qu'une boule de rayon $\sqrt{2}$ ouverte et de centre C arbitraire $(x_1 - c_1)^2 + \dots + (x_n - c_n)^2 < 2$ ne peut contenir plus de $n+1$ centres des boules empilées, centres qui sont les points de G . Or d'après le théorème de Minkowski-Blichfeldt on peut trouver C tel qu'une telle boule contienne un nombre de points de G supérieur ou égal à la mesure de la boule

(c'est-à-dire $(\sqrt{2})^n \Omega_n$), divisé par le déterminant de G . Par conséquent :

$$n + 1 \geq (\sqrt{2})^n \Omega_n / \det(G),$$

ou encore :

$$\text{densité de l'empilement} = \Omega_n / \det G \leq (n + 1) / (\sqrt{2})^n,$$

c'est ce que nous nous proposons de démontrer.

Traduit sur γ_n , cela améliore le résultat de Minkowski par un coefficient multiplicatif $\frac{1 + \varepsilon(n)}{2}$

$$\gamma_n \leq \frac{n}{\pi e} (1 + \varepsilon(n))$$

Le théorème de Hlawka cité plus haut montre

$$\gamma_n \geq \frac{n}{2\pi e} (1 + \varepsilon(n)).$$

On voudrait bien en savoir plus, en particulier si la densité peut être majorée par k^n avec $k < 1/\sqrt{2}$.

VI. CONCLUSION.

Ces quelques exemples peuvent donner une idée de l'efficacité des méthodes que Minkowski a introduites en Géométrie des nombres, ceux que nous avons donnés sont fondamentaux. Mais la variété des problèmes qui se posent est très grande. Pour l'étude des $f(x_1, \dots, x_n)$ pour lesquels la figure associée $|f(x_1, \dots, x_n)| \leq 1$ est non bornée et de mesure infinie, seule une partie des problèmes peut être étudiée par les méthodes de Minkowski et d'autres techniques doivent être introduites.

Il faut signaler pour terminer que, si dans cet exposé on a insisté sur des résultats très généraux, où le nombre de dimensions de l'espace, c'est-à-dire le nombre des variables était indifférent, il y a encore des problèmes à un petit nombre de variables, intéressants et non résolus. Par exemple, appelant maintenant *empilement* une famille d'ensembles $(A + \vec{g}, \vec{g} \in H)$ disjoints deux à deux, H n'étant plus nécessairement un réseau, et *empilement régulier*, une telle famille, si H est un réseau, on ne sait pas encore s'il n'y a pas dans l'espace à trois dimensions