

III. Formes à n variables: la méthode DE MINKOWSKI.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **8 (1962)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

$\vec{u} = (1, 0)$ et $\vec{v} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$, ce qui correspond à la forme $\left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 = x^2 + xy + y^2$ pour laquelle $\mu = 1$ et $\Delta = \frac{3}{4}$.

Si maintenant $g(x, y)$ est une forme indéfinie, décomposons la en différence de deux carrés $g(x, y) = (xu_1 + yv_1)^2 - (xu_2 + yv_2)^2$, $|g(x, y)|$ est majoré par la forme définie $f(x, y) = (xu_1 + yv_1)^2 + (xu_2 + yv_2)^2$, et $|\text{discr}(g)| = \text{discr}(f)$, ce qui démontre (C) pour les formes indéfinies. Si nous utilisons toutes les décompositions de g en différence de deux carrés, il en résulte que l'inégalité de (C) a, pour les formes indéfinies, une infinité de solutions en entiers x, y , résultat suffisant pour obtenir aisément la démonstration de (B), comme nous avons vu plus haut.

Il serait tentant de démontrer précisément l'énoncé (C') avec le coefficient optimum $\frac{1}{5}$, par le même type de méthode géométrique élémentaire. Nous y renonçons faute de temps.

III. FORMES À n VARIABLES: LA MÉTHODE DE MINKOWSKI.

De tels calculs deviennent plus compliqués dans R^3 (GAUSS a trouvé le coefficient optimum pour les formes quadratiques définies à trois variables) et vraiment difficiles pour les dimensions supérieures. En renonçant à trouver la valeur exacte de la constante optima

$$\gamma_n = \sup_f \min_{x_i} f(x_1, \dots, x_n) / (\text{discrim}(f))^{1/n}$$

(x_i entiers non tous nuls, f forme quadratique définie positive), HERMITE a pu démontrer que γ_n était finie, et plus précisément que

$$\gamma_n \leq \left(\frac{4}{3}\right)^{n(n-1)/4}$$

par un raisonnement récurrent.

Nous appellerons γ_n la constante d'Hermite (de la dimension n).

La méthode d'attaque de ce problème a été complètement renouvelée par MINKOWSKI qui a montré tout le parti qu'on pouvait tirer de la considération de la mesure (aire pour $n = 2$, volume pour $n = 3$, ...) des figures associées aux formes étudiées.

Il n'est pas plus difficile d'établir une théorie correcte de la mesure dans l'espace à n dimension R^n que celle de l'aire dans R^2 , du volume dans R^3 . Ce que nous devons supposer établi, c'est que pour une large classe d'ensembles X de R^n on a pu leur associer un nombre qu'on notera $\text{mes}(X)$ qui est ≥ 0 et éventuellement $+\infty$ tel que $\text{mes}(X \cup Y) = \text{mes}(X) + \text{mes}(Y)$ si X et Y sont sans point commun, $\text{mes}(C) = 1$ pour le « cube » unité défini par $0 \leq x_1 < 1, \dots, 0 \leq x_n < 1$, et qui est invariant par translation: $\text{mes}(X + \vec{a}) = \text{mes}(X)$. L'intégration des fonctions $f(\vec{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ s'en suit en définissant $\int f$ à l'aide de la mesure dans R^{n+1} du domaine associé à f (comme l'intégrale des fonctions positives d'une variable se définit à l'aide de l'aire du domaine associé). Alors si X et Y sont des domaines mesurables sans point commun

$$\int_{X \cup Y} f = \int_X f + \int_Y f.$$

Il est commode de supposer qu'il a été démontré que la mesure et l'intégrale sont des fonctions dénombrablement additives d'ensembles, c'est-à-dire que

$$\text{mes}\left(\bigcup_n X_n\right) = \sum_n \text{mes}(X_n) \quad \int_{\bigcup_n X_n} f = \sum_n \int_{X_n} f$$

quand les X_n sont deux à deux disjoints ¹⁾.

Désignons par Z^n le réseau de tous les points à coordonnées entières, alors les cubes $(C + \vec{z}, \vec{z} \in Z^n)$, translatés du cube-unité C , $0 \leq x_i < 1$ forment une partition de R^n (c'est-à-dire sont disjoints deux à deux et leur réunion est R^n). On a donc alors pour une fonction $f(\vec{x}) = f(x_1, \dots, x_n) \geq 0$:

¹⁾ Dans la suite, les ensembles et les fonctions considérés sont supposés implicitement mesurables et intégrables. La plus grande généralité est obtenue avec la mesure et l'intégrale de Borel-Lebesgue, mais la mesure et l'intégrale de Riemann-Jordan fournissent déjà tous les ensembles et fonctions utiles dans les applications. On peut dans ce cas se dispenser de faire appel à la propriété d'additivité dénombrable.

$$\int_{\vec{x} \in R^n} f(\vec{x}) = \sum_{\vec{z} \in Z^n} \int_{\vec{x} \in C + \vec{z}} f(\vec{x}) = \sum_{\vec{z} \in Z^n} \int_{\vec{x} \in C} f(\vec{x} + \vec{z}) = \int_{\vec{x} \in C} \sum_{\vec{z} \in Z^n} f(\vec{x} + \vec{z})$$

c'est-à-dire

$$\int_{\vec{x} \in R^n} f(\vec{x}) = \int_{\vec{x} \in C} f^*(\vec{x}) \quad (1)$$

avec

$$f^*(\vec{x}) = \sum_{\vec{z} \in Z^n} f(\vec{x} + \vec{z}).$$

Supposons que $f(\vec{x})$ soit la fonction caractéristique d'un ensemble A (c'est-à-dire la fonction égale à 1 en tout point de A et nulle en dehors de A), alors :

$$\int_{\vec{x} \in R^n} = \text{mes}(A) \text{ et } f^*(\vec{x}) = \text{nbre}((A \cap (\vec{x} + Z^n)) = \text{nbre}((A - \vec{x}) \cap Z^n)$$

(nbre (V) désigne le nombre de points de l'ensemble V).

Disons que A est *irréductible* par rapport à Z^n , si $\vec{x} \in A, \vec{x}' \in A$ et $\vec{x} - \vec{x}' \in Z^n$ entraînent $\vec{x} = \vec{x}'$, une propriété équivalente est que la famille d'ensembles $(A + \vec{z}, \vec{z} \in Z^n)$ forme un *empilement*, c'est à-dire $A + \vec{z}$ et $A + \vec{z}'$ n'ont pas d'élément commun si $\vec{z} \in Z^n, \vec{z}' \in Z^n, \vec{z} \neq \vec{z}'$ c'est encore équivalent au fait que $f^*(\vec{x}) \leq 1$ quel que soit $\vec{x} \in R^n$; il en résulte $\text{mes}(A) = \int_{\vec{x} \in G} f^*(\vec{x}) \leq 1$ (puisque

$\text{mes}(C) = 1$), on peut même préciser $\text{mes}(A) < 1$, si A est borné fermé.

Revenons à la fonction f générale. Comme $\text{mes}(C) = 1$

$$\text{Borne inf. } f^*(x) \leq \int_C f^* = \int_{R^n} f \leq \text{Borne sup. } f^*(x).$$

Il en résulte l'existence de $\vec{a} \in R^n$ tel que $f^*(\vec{a}) \leq \int_{R^n} f$ et de $\vec{b} \in R^n$ tel que $f^*(\vec{b}) \geq \int_{R^n} f$. Si f est la fonction caractéristique de l'ensemble A , on a donc $\text{nbre}(A - \vec{a}) \leq \text{mes}(A)$, $\text{nbre}(A - \vec{b}) \geq \text{mes}(A)$.

Si T est une transformation linéaire inversible de R^n , elle multiplie la mesure des ensembles par le coefficient $|\det(T)|$, $G = T(Z^n)$ est le *réseau* engendré par les n vecteurs $\vec{u}_1 = T(\vec{e}_1), \dots, \vec{u}_n = T(\vec{e}_n)$, (où les $\vec{e}_i$ sont les vecteurs-unités sur les axes),

on pose $\det(G) = |\det(T)| = \text{mesure}(P)$ où P est un domaine fondamental de R^n modulo G , par exemple P est le paralléloétope formé par les $\vec{x} = \sum t_i \vec{u}_i$, $0 \leq t_i < 1$, et le résultat obtenu ci-dessus pour le réseau Z^n se traduit pour un réseau quelconque G de R^n , par l'énoncé que nous appellerons *Théorème de Minkowski-Blichfeldt*:

Si A est un ensemble et G un réseau de R^n

$$\text{mes}(A) = \int_{x \in P} \text{nbre}((A + \vec{x}) \cap G)$$

autrement dit la valeur moyenne de $\text{nbre}((A + \vec{x}) \cap G)$ est égale à $\text{mes}(A)/\det(G)$. En particulier il existe $\vec{a}$ tel que

$$\begin{aligned} \text{nbre}((A + \vec{a}) \cap G) &\geq \text{mes}(A)/\det G \text{ et il existe } \vec{b} \text{ tel que} \\ \text{nbre}((A + \vec{b}) \cap G) &\leq \text{mes}(A)/\det G. \end{aligned}$$

Si A est irréductible par rapport à G , ou, ce qui revient au même, si la famille des ensembles $(A + \vec{g}, \vec{g} \in G)$ est un empilement $\text{mes}(A) \leq \det G$. Si en outre A est borné fermé, on a $\text{mes}(A) < 1$.

IV. APPLICATIONS AUX FORMES QUADRATIQUES DÉFINIES POSITIVES ET AUX APPROXIMATIONS DIOPHANTIENNES LINÉAIRES.

Considérons dans R^n la boule de rayon unité centrée à l'origine et ouverte, $B: t_1^2 + t_2^2 + \dots + t_n^2 < 1$ et soit Ω_n sa mesure. Nous noterons B_r celle de rayon $r: t_1^2 + t_2^2 + \dots + t_n^2 < r^2$.

Soit G un réseau de R^n . Pour que $G \cap B_r$ se réduise à l'origine, il faut et il suffit que $B_{r/2}$ soit irréductible par rapport à G , autrement dit que les $(B_{r/2} + \vec{g}, \vec{g} \in G)$ forment un empilement. On a donc alors $\text{mes}(B_{r/2}) \leq \det G$, c'est-à-dire $\frac{r^n}{2^n} \Omega_n \leq \det G$. Si donc $\vec{m}$ est un point de G (autre que l'origine) ayant la distance minima à l'origine

$$|m|^2 \leq 4(\det(G))^2/\Omega_n^{2/n}.$$

La constante d'Hermite satisfait donc à

$$\gamma_n \leq 4/\Omega_n^{2/n}.$$