

# 3. The Turning Index

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **8 (1962)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

$R^n$ , and  $(n-1)$ -spheres oriented with orientations induced by their interiors.

Symbols  $c^{n-1}$ ,  $g^{n-1}$ , ... denote oriented  $(n-1)$ -cycles in  $R^n$ ;  $D^{n-1}$ ,  $V^{n-1}$ , ... denote  $(n-1)$ -spheres in  $R^n$ .  $E^n$  denotes a closed solid  $n$ -sphere in  $R^n$ , and the boundary of  $E^n$  is denoted by  $S^{n-1}$ .  $\eta^n$  denotes a closed  $n$ -cell in  $R^n$  and the boundary of  $\eta^n$  is denoted by  $\sigma^{n-1}$ .

In this paper  $\eta^n$  is assumed to be the image of  $E^n$  under homeomorphism  $\theta$ , and  $\eta^n$  and  $\sigma^{n-1}$  obtain their orientations from  $E^n$  and  $S^{n-1}$  respectively.

### 3. THE TURNING INDEX

Let  $c^{n-1}$  be an  $(n-1)$ -cycle in  $R^n$  and  $g$  a continuous map of  $c^{n-1}$  into  $R^n$  having no fixed point. Let  $D^{n-1}$  be an  $(n-1)$ -sphere with center 0, called a *direction sphere* [2]. Let  $c^{n-1}$  be mapped on  $D^{n-1}$  as follows. To a point  $c \in c^{n-1}$  there corresponds a point  $d \in D^{n-1}$  such that the line segment from 0 to  $d$  has the same sense and direction as that from  $c$  to  $g(c)$ . The resulting  $(n-1)$ -cycle  $g^{n-1}$  on  $D^{n-1}$  is called, in the sequel, *the  $(n-1)$ -cycle  $g^{n-1}$  resulting from  $g$  applied to  $c^{n-1}$* , and the degree of the resulting map, that is, the multiple of  $D^{n-1}$  which is homologous to  $g^{n-1}$  (which is clearly independent of the radius of  $D^{n-1}$  and the location of 0) is called the *turning index* of  $c^{n-1}$  under  $g$ .

If  $p$  is a point not on  $c^{n-1}$ , the *index of  $p$  relative to  $c^{n-1}$*  is defined as the turning index of the map which maps every point of  $c^{n-1}$  into  $p$ . (For odd  $n$ , this is the negative of the corresponding definition given in [3], as shown by Theorem 1.5, page 105).

### 4. PRELIMINARY LEMMAS

LEMMA 1. *Let  $g$  and  $h$  be two continuous maps into  $R^n$  of an  $(n-1)$ -cycle  $c^{n-1}$ , such that neither leaves any point of  $c^{n-1}$  fixed, and, for no point  $c \in c^{n-1}$  are the directions from  $c$  to  $g(c)$  and from  $c$  to  $h(c)$  exactly opposite. Then the turning indices of  $c^{n-1}$  under  $g$  and  $h$  are equal.*

*Proof.* For each  $c \in c^{n-1}$ , the directions of the two vectors  $c, g(c)$  and  $c, h(c)$  are not opposite and hence, if not identical,