

2. GRENZWERTBETRACHTUNGEN AUF DER UNTERSTUFE

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **8 (1962)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Einwirkung solcher Darstellungen blieb auf die Generation von Mathematiklehrern nicht ohne Einfluss, die als erste die Differentialrechnung in die Schule einführen sollten. Ich habe selbst eine sehr deutliche Erinnerung an meine Schulzeit, wo durch mystische Operationen, die vom Schüler ganz zweifellos gar nicht verstanden werden konnten, die richtigen Ergebnisse mehr oder weniger geschickt erschlichen wurden. Zwar lernte der Schüler durch Übung, wie der Kalkül anzuwenden sei; es blieb jedoch hinsichtlich der Grundlagen ein beträchtliches Unbehagen, mehr oder weniger stark ausgeprägte Ratlosigkeit oder sogar Verwirrung zurück.

Der heutige Unterricht darf diese Schwierigkeiten gar nicht erst aufkommen lassen. Das kann u.a. dadurch erreicht werden, dass man dem Begriff des Grenzwerts schon frühzeitig die nötige Aufmerksamkeit schenkt. Dabei begegnen sich die Forderung nach sachlicher Richtigkeit und der Wunsch nach Berücksichtigung psychologischer Erkenntnisse. Eine Möglichkeit in dieser Hinsicht besteht eben darin, dass man den Begriff des Grenzwerts schon auf früher Stufe in einer Form vorbereitet, die dem jeweiligen Alter angepasst erscheint.

In der deutschen Bundesrepublik unterscheidet man:

- | | |
|----------------------------|------------------------------------|
| 1. Die Grundschule: | 6- 9-jährige Schüler |
| 2. Das Gymnasium, und zwar | |
| | Unterstufe: 10-13-jährige Schüler |
| | Mittelstufe: 14-16-jährige Schüler |
| | Oberstufe: 17-19-jährige Schüler |

Ich will im folgenden im einzelnen Vorschläge machen, wie man den Begriff des Grenzwerts schon auf früher Stufe in den Unterricht einbeziehen kann.

2. GRENZWERTBETRACHTUNGEN AUF DER UNTERSTUFE

Das einzige Objekt, bei dem schon auf der Unterstufe Grenzwertbetrachtungen angestellt werden können, ist zugleich eines der wichtigsten; es handelt sich um die periodischen Dezimalbrüche.

2.1. Der periodische Dezimalbruch.

Die Behandlung muss sich auf das einzelne Zahlenbeispiel beschränken. Aus dem echten Bruch $3/11$ ergibt sich der Reihe nach:

$$\begin{aligned} 3 : 11 &= 0, 27 + \frac{3}{11} \cdot \frac{1}{100} \\ &= 0, 27\,27 + \frac{3}{11} \cdot \left(\frac{1}{100}\right)^2 \\ &= 0, 27\,27\,27 + \frac{3}{11} \cdot \left(\frac{1}{100}\right)^3 \text{ usf. usf.} \end{aligned}$$

Hierfür schreibt man üblicherweise:

$x = 3 : 11 = 0, 27\,27\,27 \dots$. Der Schüler muss nun lernen, dass die Zahl $x = 0, 27\,27\,27 \dots$ eine Zahl bedeutet, die die folgenden Eigenschaften hat:

$$\begin{aligned} 0, 27 &< x < 0, 28 \\ 0, 27\,27 &< x < 0, 27\,28 \\ 0, 27\,27\,27 &< x < 0, 27\,27\,28 \text{ usf. usf.} \end{aligned}$$

Kurz, die Zahl x wird durch eine *Schachtelung* erklärt.

Das bedeutet eine *erste methodische Forderung*:

Schon bei den 12-jährigen Schülern soll das Kleinerzeichen und das Grösserzeichen eingeführt werden.

Die Erfahrung lehrt, dass das unbedenklich geschehen kann; irgendwelche Schwierigkeiten entstehen dabei nicht.

2.2. Das Problem der Addition periodischer Dezimalbrüche.

Die Brüche $x = 0, 38\,38\,38 \dots$ und $y = 0, 25\,25\,25 \dots$ sollen addiert werden. Aus den Schachtelungen:

$$\begin{array}{ll} 0, 38 < x < 0, 39 & 0, 25 < y < 0, 26 \\ 0, 38\,38 < x < 0, 38\,39 & 0, 25\,25 < y < 0, 25\,26 \\ 0, 38\,38\,38 < x < 0, 38\,38\,39 & 0, 25\,25\,25 < y < 0, 25\,25\,26 \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{folgt:} \quad 0,38 + 0,25 < x+y < 0,39 + 0,26 \\
 \quad \quad 0,3838 + 0,2525 < x+y < 0,3839 + 0,2526 \\
 \quad \quad 0,383838 + 0,252525 < x+y < 0,383839 + 0,252526 \\
 \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{oder:} \quad 0,63 < x+y < 0,65 \\
 \quad \quad 0,6363 < x+y < 0,6365 \\
 \quad \quad 0,636363 < x+y < 0,636365 \\
 \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots
 \end{array}$$

Ergebnis: $0,383838 \dots + 0,252525 \dots = 0,636363 \dots$
 Diese Durchführung der Addition zweier periodischer Dezimalbrüche bedeutet eine *zweite methodische Forderung* für den Unterricht der Unterstufe:

Das Rechnen mit Ungleichungen muss frühzeitig geübt werden.

2.3. Das Problem der Subtraktion zweier periodischer Dezimalbrüche.

Um z.B. die Zahl $y = 0,252525 \dots$ von der Zahl $x = 0,383838 \dots$ abzuziehen, muss man wieder mit den Schachtelungen, bzw. mit den Ungleichungen operieren. Jedoch ist die nun folgende Operation schon anspruchsvoller. Es handelt sich um die Ausführung des folgenden Schlusses:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Aus} & a < A \\
 \text{und} & b < B \\
 \text{folgt} & a - B < A - b.
 \end{array}$$

Für einen 12-jährigen Schüler ist die Einsicht, die dieses Verfahren fordert, nicht einfach. Es wird aber *nicht zuviel* verlangt. Die Aufnahme dieses Schlussverfahrens in den Unterricht der 12-jährigen bedeutet *die dritte methodische Forderung*:

Die Behandlung der einfachsten Regeln für das Rechnen mit Ungleichungen soll rechtzeitig, d.h. aber frühzeitig erfolgen. Das ist nicht schwerer als z.B. die Ausrechnung der Differenz

$$\frac{6}{7} - \frac{2}{3} = \frac{6.3 - 7.2}{7.3} = \frac{4}{21}.$$

Die Durchführung der Rechnung sieht so aus:

$$\begin{array}{rcll} 1. \text{ Schritt:} & 0,38 < x < 0,39 \\ & - 0,26 > y > 0,25 \end{array}$$

$$0,12 < x - y < 0,14$$

$$\begin{array}{rcll} 2. \text{ Schritt:} & 0,3838 < x < 0,3839 \\ & 0,2526 > y > 0,2525 \end{array}$$

$$0,1312 < x - y < 0,1314$$

$$\begin{array}{rcll} 3. \text{ Schritt:} & 0,383838 < x < 0,383839 \\ & 0,252526 > y > 0,252525 \end{array}$$

$$0,131312 < x - y < 0,131314 \text{ usf. usf.}$$

$$\text{Ergebnis: } 0,383838 \dots - 0,252525 \dots = 0,131313 \dots$$

2.4. Umwandlung eines periodischen Dezimalbruchs in einen gemeinen Bruch.

Sofern auf den Gymnasien diese Umwandlung gelehrt wird, bedient man sich in der Regel des folgenden Verfahrens:

Aus $x = 0,272727 \dots$ folgt $100x = 27,272727 \dots$

Durch Subtraktion findet man:

$$99x = 27, \text{ also } x = \frac{27}{99} = \frac{3}{11}.$$

Bei der Ausführung dieser Rechnung hat man aber unerlaubter Weise mit konvergenten Reihen gerechnet, und zwar hat man

1) eine unendliche Reihe mit 100 multipliziert,

2) zwei unendliche Reihen voneinander abgezogen.

Beide Prozesse sind unstreng durchgeführt. Sie können sauber behandelt werden:

$x = 0,27\,27\,27 \dots$ bedeutet die Schachtelung oder die Kette von Ungleichungen:

$$\begin{array}{rcl} 0,27 < x < 0,28 \\ 0,27\,27 < x < 0,27\,28 \\ 0,27\,27\,27 < x < 0,27\,27\,28 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

Hieraus findet man:

$$\begin{array}{rcl} 27 < 100x < 28 \\ 27,27 < 100x < 27,28 \\ 27,27\,27 < 100x < 27,27\,28 \\ 27,27\,27\,27 < 100x < 27,27\,27\,28 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

Durch geeignete Subtraktion gewinnt man eine Kette von Ungleichungen, die ihrerseits eine Schachtelung darstellen:

$$\begin{array}{rcl} 27,27 - 0,28 < 99x < 27,28 - 0,27 \\ 27,27\,27 - 0,27\,28 < 99x < 27,27\,28 - 0,27\,27 \\ 27,27\,27\,27 - 0,27\,27\,28 < 99x < 27,27\,27\,28 - 0,27\,27\,28 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

oder:

$$\begin{array}{rcl} 26,99 < 99x < 27,01 \\ 26,99\,99 < 99x < 27,00\,01 \\ 26,99\,99\,99 < 99x < 27,00\,00\,01 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

D.h. $99x = 27$ oder $x = 27 : 99 = 3 : 11$.

2.5. Zusammenfassung.

Die anspruchsvolle Forderung, die periodischen Dezimalbrüche strenger als üblich auf der Unterstufe zu behandeln, lässt sich erfüllen. Die Behandlung erfordert die Einbeziehung der Zeichen $<$ und $>$ sowie der einfachsten Regeln des Rechnens mit Ungleichungen in den Unterricht der 12-jährigen Schüler.

Die Behandlung kommt darauf hinaus, dass man die nicht-abbrechenden periodischen Dezimalbrüche als Schachtelungen definiert.

Damit ist dann auch der nichtperiodische unendliche Dezimalbruch in die Nähe gerückt. Wird die Existenz der nichtperiodischen Dezimalbrüche vorausgesetzt, so ist in gewissem Umfang auch das Problem der reellen Zahl in Angriff genommen, und die Lösung dieses für die Schule sehr wichtigen Problems scheint angebahnt. Die Folgen sind schwerwiegend: Nun können auf der Mittelstufe die Irrationalitätsbeweise für Zahlen wie etwa $\sqrt{2}$ oder $\lg 3$ sauber durchgeführt werden.

Eine *vierte methodische Forderung* ist wichtig: Die Behandlung der einzelnen Grenzwerte kann und soll auch auf der Unterstufe sauber erfolgen. Numerische Berechnungen bilden die Grundlage. Die Behandlung soll sich auf *das einzelne Zahlenbeispiel* beschränken.

Die systematische Behandlung der Grenzwerte, insbesondere der Kalkül des Rechnens mit Grenzwerten soll der Oberstufe vorbehalten bleiben.

3. GRENZWERTBETRACHTUNGEN AUF DER MITTELSTUFE

3.1. *Forderungen methodischer und psychologischer Art.*

Auch auf der Mittelstufe soll sich die Behandlung auf das einzelne Beispiel beschränken. Jedes Beispiel soll elementar, wenn möglich unter Zuhilfenahme anschaulicher Methoden, jedoch streng behandelt werden. Die systematische Behandlung kann nur vorbereitet werden; der Grenzwertkalkül gehört nicht auf die Mittelstufe.

Die Untersuchung vorkommender Funktionen auf Monotonie ist sehr wichtig; gerade die Monotonie hat noch durchaus anschaulichen Charakter.

Das Hilfsmittel der Intervallschachtelung ist anschaulicher Herkunft, führt jedoch über den Gebrauch der blossen Anschauung hinaus.

Es muss in der Mittelstufe angestrebt werden, dass der Schüler zwar von der Anschauung ausgeht, aber schliesslich erfährt, dass die Anschauung allein ein unvollkommenes Hilfsmittel ist.