

# 8. Algebras over Hopf algebras.

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **7 (1961)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

leads to the formula

$$(\partial f)x = \partial(fx) + (-1)^{r+1}f(\partial x), \quad r = \deg f.$$

### 8. ALGEBRAS OVER HOPF ALGEBRAS.

We have seen that a graded algebra is a graded  $R$ -module  $X$  and an  $R$ -mapping  $\mu: X \otimes X \rightarrow X$ . Suppose now that  $X$  is also an  $A$ -module where  $A$  is a Hopf algebra over  $R$ . Then  $X \otimes X$  is an  $A$ -module as defined in section 7. We define  $X$  to be an algebra over the Hopf algebra  $A$  (briefly, an  $A$ -algebra) if the multiplication mapping  $\mu: X \otimes X \rightarrow X$  is an  $A$ -mapping.

In terms of elements  $a \in A$  and  $x_1, x_2 \in X$ , the condition for  $\mu$  to be an  $A$ -mapping takes the form

$$(8.1) \quad a(x_1 x_2) = \sum_i (-1)^{pq_i} (a'_i x_1) (a''_i x_2)$$

where

$$\Psi a = \sum_i a'_i \otimes a''_i, \quad p = \deg x_1, \quad q_i = \deg a''_i.$$

It is to be observed that this concept of an algebra over a Hopf algebra has arisen in a natural way. The discussion of section 7 demonstrates its inevitability. This being true there ought to be numerous examples.

The first, and for us the most important example, is the cohomology algebra of a space  $H^*(X; Z_p)$  over the Hopf algebra  $\mathcal{A}_p$  of reduced power operations. The cup-product formula

$$\mathcal{P}^k(x_1 x_2) = \sum_{i=0}^k (\mathcal{P}^i x_1) (\mathcal{P}^{k-i} x_2),$$

and the diagonal mapping  $\Psi \mathcal{P}^k = \sum_{i=0}^k \mathcal{P}^i \otimes \mathcal{P}^{k-i}$  show that 8.1 is satisfied.

Another example is provided by the differential, graded, augmented algebras of Cartan [8]. In this case,  $X$  is an augmented chain complex (i.e. a module over  $E(\partial, -1)$ , see § 7), and a chain mapping  $\mu: X \otimes X \rightarrow X$  defines an algebra structure in  $X$ .

A trivial example is provided by any algebra  $X$  over  $R$ . Note first that  $\varphi: R \otimes R \rightarrow R$  defined by  $\varphi(r_1 \otimes r_2) = r_1 r_2$  is an isomorphism (recall that  $\otimes = \otimes_R$ ). Set  $\Psi = \varphi^{-1}: R \rightarrow R \otimes R$ , then  $\varphi, \Psi$  give a natural structure of a Hopf algebra to the ground ring  $R$ . It is easily checked that the natural  $R$ -structure in  $X \otimes X$  coincides with that defined by  $\Psi$ . Thus any algebra over the ground ring is an algebra over the ground ring regarded as a Hopf algebra.

As another example, let  $X$  be an algebra over  $R$ , and let  $\pi$  be a group of automorphisms of the algebra  $X$ . Let  $A$  be the group ring of  $\pi$  over  $R$  with the usual multiplication. Define the diagonal  $\Psi: A \rightarrow A \otimes A$  to be the mapping induced by the diagonal mapping  $d: \pi \rightarrow \pi \times \pi$ . Then  $A$  becomes a Hopf algebra. Since any  $g \in \pi$  is an automorphism,  $g(x_1 x_2) = (gx_1)(gx_2)$ ; and since  $dg = (g, g)$ , it follows that 8.1 holds. Thus any algebra is an algebra over the Hopf algebra of its automorphism group.

## 9. UNIVERSAL $A$ -ALGEBRAS.

The foregoing examples of algebras over Hopf algebras arose naturally. We now show how to construct them in a wholesale fashion.

Let  $A$  be any Hopf algebra. It is easy to construct many modules over the algebra  $A$  (i.e. take quotients of  $A$  by left ideals, and then take direct sums of these). Let  $M$  be any graded  $A$ -module. Let  $M^n$  denote the tensor product of  $n$  copies of  $M$ . As in section 7,  $M^n$  is an  $A$ -module. Form the direct sum

$$T(M) = \sum_{n=0}^{\infty} M^n$$

where  $M^0 = R$ . Define  $\mu: T(M) \otimes T(M) \rightarrow T(M)$  in terms of components  $x \in M^r, y \in M^s$  by  $\mu(x \otimes y) = x \otimes y \in M^{r+s}$  making use of the associative law  $M^r \otimes M^s \approx M^{r+s}$ . In this way  $T(M)$  is an associative algebra. It is called the *free associative algebra* generated by  $M$  (also, the *tensor algebra* of  $M$ ). Since the associative law  $M^r \otimes M^s \approx M^{r+s}$  is an  $A$ -mapping, it follows that  $T(M)$  is an algebra over the Hopf algebra  $A$ .