

# 50. Justification des types.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **7 (1961)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

4. *Le cycle ne contient pas d'idéaux remarquables*, notamment pas d'idéal unité. Les conjugués de ses idéaux forment un cycle différent, dont les idéaux sont respectivement associés à ceux du précédent. Les deux cycles peuvent être qualifiés *conjugués et associés*; ils définissent deux classes d'idéaux différentes conjuguées et inverses.

Les cycles des trois premiers types (précédents) sont conjugués et associés à eux-mêmes; ils définissent des classes doubles.

Le corps de discriminant 145 (tableaux XXII et XXIV) contient, en plus de deux cycles de type 1, deux cycles conjugués (et associés), de chacun trois idéaux:

$$(3, \theta-3) \rightarrow (8, \theta-4) \rightarrow (2, \theta-5); \quad (3, \theta-5) \rightarrow (2, \theta-4) \rightarrow (8, \theta-3).$$

Les conjugués des idéaux, d'indices 0, 1, 2, du premier cycle sont respectivement les idéaux d'indices 0, 2, 1, du second cycle (somme des indices congrue à 0, mod. 3); leurs associés sont respectivement les idéaux d'indices 2, 1, 0 (somme des indices congrue à  $-1$ , mod. 3). Les sens de circulation sur les deux schémas sont opposés.

### 50. Justification des types.

Pour établir que les quatres types de cycles sont les seuls possibles, on va étudier, comme il a été dit, le numérotage des éléments des cycles; en comparant deux cycles, non nécessairement différents, dont chacun contient les associés et par suite aussi les conjugués (dans un ordre différent) des termes de l'autre.

THÉORÈME de la correspondance des indices. — Dans un corps réel, *pour que deux cycles* (éventuellement égaux), d'idéaux semi réduits,  $\mathbf{M}_i$  et  $\mathbf{N}_j$ , *contiennent chacun les idéaux associés, et, par suite aussi, conjugués, des idéaux de l'autre, il suffit* (et il faut évidemment) :

*qu'il existe un terme  $\mathbf{M}_p$ , de l'un, et un terme  $\mathbf{N}_q$ , de l'autre, qui soient conjugués;*

*ou qu'il existe un terme  $\mathbf{M}_p$  et un terme  $\mathbf{N}_{q-1}$ , qui soient associés, relativement à leur racine finale, commune.*

Chacune des deux conditions entraîne l'autre; les deux cycles ont alors le même nombre  $h$  de termes et les indices des idéaux qui se correspondent par conjugaison, ou par association, ont une somme constante, mod.  $h$ :

$$\mathbf{M}_i \text{ et } \mathbf{N}_j \text{ conjugués} \Leftrightarrow i + j \equiv p + q, \quad (\text{mod. } h),$$

$$\mathbf{M}_{i'} \text{ et } \mathbf{N}_{j'} \text{ associés} \Leftrightarrow i' + j' \equiv p + q - 1, \quad (\text{mod. } h).$$

Pour la première condition, on vérifie que:

$$\mathbf{M}_p \text{ et } \mathbf{N}_q \text{ conjugués} \Rightarrow \mathbf{M}_{p+1} \text{ et } \mathbf{N}_{q-1} \text{ conjugués},$$

ce qui résulte des égalités de définition de la succession dans les cycles considérés (44), qui peuvent être mis sous les formes suivantes, en tenant compte de la réciprocité de la conjugaison et de l'association

$$\begin{aligned} (\text{associé de } \mathbf{N}_{q-1}) &= (\text{conjugué de } \mathbf{N}_q) = \mathbf{M}_p \\ &\Rightarrow \mathbf{N}_{q-1} = (\text{associé de } \mathbf{M}_p) = (\text{conjugué de } \mathbf{M}_{p+1}). \end{aligned}$$

On en déduit, par récurrence sur les indices,  $\lambda$  étant a priori, indéfini,

$$\mathbf{M}_{p+\lambda} \text{ et } \mathbf{N}_{q-\lambda} \text{ conjugués; } [(p+\lambda) + (q-\lambda) = p+q].$$

En outre si  $h$  est le nombre d'idéaux  $\mathbf{M}_i$ , leur périodicité entraîne:

$$\mathbf{M}_{p+h} = \mathbf{M}_p \Rightarrow \mathbf{N}_{q-h} = \mathbf{N}_q.$$

Le nombre d'idéaux  $\mathbf{N}_j$  est aussi  $h$  et l'égalité des sommes d'indices est une congruence, mod.  $h$ .

D'autre part l'égalité de succession entraîne:

$$\text{associé de } \mathbf{N}_{q-\lambda-1} = (\text{conjugué de } \mathbf{N}_{q-\lambda}) = \mathbf{M}_{p+\lambda};$$

de sorte que la relation entre les indices  $i'$  et  $j'$  d'idéaux respectivement associés est bien:

$$i' + j' \equiv (p+\lambda) + (q-\lambda-1) \equiv p+q-1, \quad (\text{mod. } h).$$

La démonstration est corrélatrice et la propriété reste valable pour la deuxième condition (existence d'un couple d'idéaux associés).

Cette propriété acquise, on obtient les trois premiers types de cycles, en considérant *un cycle* (ou deux cycles égaux) *qui renferme les conjugués. et par suite les associés de chacun de ses termes. Il suffit, pour cela, de constater qu'il renferme:*

le conjugué d'un de ses idéaux (éventuellement double);  
ou l'associé d'un de ses idéaux (éventuellement réfléchi).

1. Si un tel cycle a un *nombre impair d'idéaux*, il contient *un* (et un seul) *idéal double* et *un* (et un seul) *idéal réfléchi*; il est du *type 1*.

Les idéaux conjugués et associés étant respectivement définis par les congruences:

$$i+j \equiv a; \quad i'+j' \equiv a-1, \quad (\text{mod. } h);$$

l'indice  $x$ , d'un idéal double et l'indice  $x'$  d'un idéal réfléchi sont déterminés par les équations congruentielles:

$$2x \equiv a; \quad 2x' \equiv a-1, \quad \text{mod. } h.$$

Comme  $h$  est impair (premier avec 2) chacune a une et une seule solution.

2 et 3. Si un tel cycle a un *nombre pair d'idéaux*, il contient, *ou bien deux idéaux doubles*, ou bien *deux idéaux réfléchis*; il est soit du *type 2*, soit du *type 3*.

Comme  $h$  est pair, une seule des équations congruentielles précédentes est possible; celle dont le second membre,  $a$  ou  $a-1$  est un entier pair. Elle a alors deux solutions de différence  $h:2 \pmod{h}$ .

Pour  $h = 2$ , le type 2 est le seul possible (ainsi qu'il a déjà été dit), car si deux idéaux successifs  $\mathbf{M}_0$  et  $\mathbf{M}_1$  du cycle étaient associés, ils seraient aussi conjugués, puisque:

$$\mathbf{M}_1 = \text{associé de } \mathbf{M}_0 = \text{conjugué de } \mathbf{M}_1.$$

Les deux idéaux auraient des normes égales et des racines égales, donc seraient égaux; le cycle n'aurait qu'un seul terme, l'idéal unité.

4. Par contraposition des propriétés précédentes, *un cycle qui ne contient pas d'idéal semi réduit remarquable*, ne peut contenir de couples, ni d'idéaux conjugués, ni d'idéaux associés; *il n'est pas égal à son cycle conjugué*, qui lui est aussi associé, il est du *type 4*.

Dans la notation indicielle, de deux cycles conjugués, de type 4, d'ordre  $h$ , les indices d'idéaux conjugués ont une somme constante, qui peut être choisie arbitrairement (notamment  $0, \text{ mod. } h$ ); les

indices des idéaux associés ont alors pour somme constante  $a-1$  (notamment  $-1, \text{ mod. } h$ ). Ce sont ces constantes 0 et  $-1$  qui ont été adoptées dans l'exemple des tableaux XXII et XXIV.

La constante de la somme des indices d'idéaux correspondants, dont, par ailleurs les points correspondants ont même abscisse, ou même ordonnée, explique la différence des sens de parcours sur les schémas. On peut aussi remarquer que les conjugués d'un idéal et de son suivant sont un idéal et son précédent.

### 51. Structure du groupe des classes d'idéaux.

Dans un corps réel, pour établir la table de PYTHAGORE (de la multiplication) des classes d'idéaux, il suffit d'établir celle des cycles qui les caractérisent, ou les représentent proprement.

Pour multiplier deux cycles, on en choisit des représentants, qui figurent dans des décompositions (convenables) de valeurs de la table (éventuellement prolongée). Comme, dans le cas d'un corps imaginaire, on cherche, au besoin par récurrence, un idéal semi réduit qui soit congru à ce produit; le cycle auquel appartient cet idéal est le produit des cycles considérés; ou, plus exactement, détermine la classe qui est le produit des classes représentées par les cycles multipliés.

Dans un corps qui n'a qu'un petit nombre de cycles (ce qui est le cas pour des discriminants relativement petits), la détermination de la structure du groupe des classes (ou des cycles) est, en général aisée; elle peut être facilitée par la considération du nombre de cycles, qui est l'ordre du groupe. Si cet ordre est un nombre premier le groupe est cyclique et chacun de ses termes, différent de l'unité (ou de la classe principale) en est un générateur. Si l'ordre est un produit de nombres premiers différents, le groupe est encore cyclique, mais il y a lieu de chercher ses générateurs; ce sont les termes dont l'ordre est égal à celui du groupe. Dans le cas général, la comparaison de l'ordre de certains termes à l'ordre du groupe peut permettre d'affirmer que le groupe est, ou n'est pas cyclique.

Le tableau XXVII donne un exemple de recherche de la structure du groupe des classes, pour un corps de discriminant assez élevé; 62 501; dont le polynôme fondamental est  $F(x) = x^2 + x - 15\ 625$ .