

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 7 (1961)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LES CORPS QUADRATIQUES
Autor: Châtelet, A.
Kapitel: 47. Détermination des cycles.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-37125>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 08.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Les limites pour i infini des multiplicateurs ρ_i et des éléments α_i résultent de leur appartenance à des progressions géométriques. La raison ω , de ces progressions est le produit de quotients $(\theta - c_i) : m_i$ (i de 0 à $h-1$) positifs et inférieurs à 1; elle est donc inférieure à 1, d'où les limites des termes des progressions.

La croissance des éléments α_i et de leurs conjugués α'_i , et la comparaison (des signes) des éléments consécutifs, résulte de leur construction au moyen des bases de $\mathbf{M}_i$, qui sont semi réduits:

$$\begin{aligned}\alpha_{i+1} : \alpha_i &= [\rho_i \times (\theta - c_i)] : [\rho_i \times m_i] = (\theta - c_i) : m_i < 1, \\ \alpha'_{i+1} : \alpha'_i &= [\rho'_i \times (\theta' - c_i)] : [\rho'_i \times m_i] = (\theta' - c_i) : m_i < -1.\end{aligned}$$

47. Détermination des cycles.

La considération de la suite des bases de $\mathbf{M}_0$ permet d'établir que les cycles d'idéaux semi réduits représentent les classes *proprement*.

THÉORÈME de la détermination des cycles. — Dans un corps réel, *chaque classe d'idéaux contient un et un seul cycle d'idéaux semi réduits*.

En définissant les idéaux (canoniques) réduits (20), pour un corps quadratique quelconque (réel ou imaginaire), il a été établi que toute classe d'idéaux contient au moins un idéal $\mathbf{M}_0$ réduit, qui, pour un corps réel, est, a fortiori, semi réduit (40). La classe renferme, par suite, le cycle des idéaux réduits $\mathbf{M}_i$, obtenus en formant les suivants successifs de $\mathbf{M}_0$, puisque ces idéaux sont congrus à $\mathbf{M}_0$.

Pour établir que le cycle ainsi construit est unique, on peut d'abord démontrer que:

dans un idéal $\mathbf{M}_0$ semi réduit, *pour qu'une base arithmétique libre, de deux éléments positifs $\gamma_j > \gamma_{j+1}$, appartienne à la suite des bases, $\alpha_i \alpha_{i+1}$, associée au cycle d'idéaux semi réduits engendré par $\mathbf{M}_0$, il faut et il suffit que: ces termes et leurs conjugués vérifient les comparaisons:*

$$\gamma_{j+1} : \gamma_j < 1; \quad \gamma'_{j+1} : \gamma'_j < -1;$$

la première résulte de l'ordre adopté pour numérotter les deux termes.

La condition est *nécessaire* puisqu'elle a été vérifiée ci-dessus pour la suite des bases α_i .

Pour démontrer qu'elle est *suffisante*, il peut être commode d'établir d'abord que pour un idéal qui a une base vérifiant ces conditions (même s'il n'est pas semi réduit):

tout élément non nul ξ , de cet idéal, dont la valeur absolue n'est égale ni à γ_j , ni à γ_{j+1} , vérifie l'une, au moins, des comparaisons:

$$|\xi| > \gamma_j > \gamma_{j+1}; \quad \text{ou} \quad |\xi'| > |\gamma'_{j+1}| > |\gamma'_j|.$$

Cet élément ξ peut être construit par additions et soustractions au moyen des termes de la base considérée, de sorte que:

$$\xi = x\gamma_j + y\gamma_{j+1}; \quad \xi' = x\gamma'_j + y\gamma'_{j+1}; \quad x, y \text{ nombres entiers.}$$

Il suffit alors d'examiner les divers cas, dépendant des signes et de la nullité des entiers x, y :

$$xy > 0: |\xi| = |x\gamma_j + y\gamma_{j+1}| = |x\gamma_j| + |y\gamma_{j+1}| > \gamma_j;$$

$$xy < 0: |\xi'| = |x\gamma'_j + y\gamma'_{j+1}| = |x\gamma'_j| + |y\gamma'_{j+1}| > |\gamma'_{j+1}|;$$

$$y = 0 \quad \text{et} \quad |x| \neq 1: |\xi| = |x\gamma_j| > \gamma_j;$$

$$x = 0 \quad \text{et} \quad |y| \neq 1: |\xi'| = |y\gamma'_{j+1}| > |\gamma'_{j+1}|.$$

On peut mettre la disjonction ainsi vérifiée sous la forme d'implications:

$$|\xi| < \gamma_j \Rightarrow |\xi'| \geq |\gamma'_{j+1}|;$$

$$|\xi'| < |\gamma'_{j+1}| \Rightarrow |\xi| \geq \gamma_j.$$

Ceci acquis, on compare, dans $\mathbf{M}_0$, à la suite des bases $\alpha_i \alpha_{i+1}$, une base $\gamma_j \gamma_{j+1}$ vérifiant la condition indiquée. La suite des α_i décroissant de $+\infty$ à 0, γ_j est situé dans l'un des intervalles, il existe i , tel que:

$$\alpha_i \geq \gamma_j > \alpha_{i+1}.$$

Il y a égalité, si non d'après la propriété précédente, appliquée à γ_j comparée à la base des α , puis à α_{i+1} , comparée à la base des γ :

$$\gamma_j < \alpha_i \Rightarrow |\gamma'_j| > |\alpha'_{i+1}| \Rightarrow \alpha_{i+1} > \gamma_j;$$

ce qui est contradictoire avec le choix de α_i .

On peut alors comparer α_{i+1} à la base $\gamma_j = \alpha_i, \gamma_{j+1}$; il en résulte:

$$\alpha_{i+1} < \alpha_i = \gamma_j \Rightarrow |\alpha'_{i+1}| \geq |\gamma'_{j+1}|.$$

La dernière comparaison est une égalité, si non la comparaison de γ_{j+1} à la base des α entraînerait :

$$|\gamma'_{j+1}| < |\alpha'_{i+1}| \Rightarrow \gamma_{j+1} > \alpha_i = \gamma_j,$$

ce qui est contradictoire avec la définition de la base des γ .

L'égalité des valeurs absolues $|\gamma'_{j+1}| = |\alpha'_{i+1}|$ entraîne celle des conjugués $\gamma_{j+1} = \alpha_{i+1}$, puisqu'ils sont positifs.

Le théorème résulte aisément de cette propriété préalable : si un idéal $\mathbf{M} = (m, \theta - c)$, semi réduit, de racine finale c , est congru aux idéaux $\mathbf{M}_i$ d'un cycle et notamment à $\mathbf{M}_0$, dans lequel est construit une suite de bases $\alpha_i \alpha_{i+1}$, il existe un élément ρ , qui peut être choisi positif, tel que $(\rho) \times \mathbf{M}$ soit égal à $\mathbf{M}_0$. Le couple d'éléments :

$$\gamma_j = \rho \times m \quad \gamma_{j+1} = \rho \times (\theta - c)$$

est une base arithmétique libre de $\mathbf{M}_0$, qui vérifie les conditions précédentes et qui par suite est égale à une des bases de la suite :

$$\rho \times m = \alpha_i = \rho_i \times m_i \quad \rho \times (\theta - c) = \alpha_{i+1} = \rho_i (\times \theta - c_i).$$

Dans la dernière égalité, la comparaison des coefficients de θ montre que :

$$\rho = \rho_i, \quad m = m_i, \quad c = c_i, \quad \mathbf{M} = \mathbf{M}_i.$$

Tout idéal $\mathbf{M}$, semi réduit, congru aux idéaux d'un cycle d'idéaux semi réduits est égal à un idéal de ce cycle.

48. Diviseurs de l'unité.

THÉORÈME des diviseurs de l'unité (II). — Dans un corps réel, pour chacun des cycles d'idéaux semi réduits, désignés par leurs racines finales :

$$\mathbf{M}_i = (m_i, \theta - c_i); \quad i \text{ de } 0 \text{ à } h-1;$$

les diviseurs de l'unité sont égaux aux produits par $+1$ et -1 des puissances ω^λ , (d'exposants λ entiers quelconques) de :

$$\omega = [\Pi(\theta - c_i)] : [\Pi m_i]; \quad i \text{ de } 0 \text{ à } h-1.$$

Cette expression a la même valeur pour tous les cycles du corps.