46. Suite de bases d'un idéal semi réduit.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **7 (1961)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

Les autres multiplicateurs sont des produits de ceux là par des puissances de $\omega = \rho_3$, qui est égal à:

$$\omega = \rho_3 = \rho_2 \times (\theta - 5) : 1 = (-\theta + 6) \times (\theta - 5) : 6 = 2\theta - 11.$$

On vérifie aisément que ω et, par suite ses puissances et leurs opposées sont des diviseurs de l'unité; il suffit de calculer la norme de ω:

$$N(\omega) = \omega \times \omega' = (2\theta - 11) \times (2\theta' - 11) = -4 \times 36 + 22 + 121 = -1.$$

Pour le cycle de 5 idéaux:

$$\mathbf{M}_0 = (5,\ \theta - 2),\quad \mathbf{M}_1 = (6,\ \theta - 3),\quad \mathbf{M}_2 = (4,\ \theta - 4),$$
$$\mathbf{M}_3 = (4,\ \theta - 3),\quad \mathbf{M}_4 = (6,\ \theta - 2);$$

les multiplicateurs sont:

$$\rho_0 = 1,\quad \rho_1 = (\theta - 2) : 6,\quad \rho_2 = (-\theta + 7) : 4,\quad \rho_3 = (3\theta - 16) : 4,$$
$$\rho_4 = (-7\theta + 39) : 6;\ \omega = \rho_5 = 2\theta - 11.$$

On retrouve la valeur précédente.

Dans le cas d'un cycle d'un seul idéal $(1,\ \theta - c)$, les multiplicateurs sont les puissances de:

$$\omega = \rho_1 = (\theta - c);$$

cet élément est d'ailleurs manifestement un diviseur de l'unité:

$$(\theta - c) \times (\theta' - c) = F(c) = -1.$$

46. Suite de bases d'un idéal semi réduit.

A un cycle d'idéaux semi réduits $\mathbf{M}_i$ auquel est associé une suite de multiplicateurs ρ_i, on peut aussi associer une suite de bases, arithmétiques libres de l'idéal $\mathbf{M}_0$ (qui peut être choisi arbitrairement dans le cycle, ou même être remplacé par un idéal $(\gamma) \times \mathbf{M}_r$).

Théorème de la suite des bases. — *Dans l'idéal* $\mathbf{M}_0$, d'un cycle d'idéaux semi réduits $\mathbf{M}_i = (m_i,\ \theta - c_i)$, *on peut construire une suite*, doublement illimitée, d'*éléments* α_i (entiers de $\mathbf{M}_0$), par les relations:

$$\alpha_i = m_i \times \rho_i = (\theta - c_{i-1}) \times \rho_{i-1};$$
$$\alpha_{i+1} = m_{i+1} \times \rho_{i+1} = (\theta - c_i) \times \rho_i;$$

Tout couple d'éléments successifs α_i, α_{i+1} *constitue une base arithmétique libre de* $\mathbf{M}_0$.

Les ρ_i sont les multiplicateurs définis ci-dessus par la relation de récurrence, de coefficients m_i, $\theta - c_i$; il en résulte l'égalité des deux expressions données pour chaque élément.

D'autre part le couple d'éléments m_i, $\theta - c_i$ est la base canonique, donc arithmétique libre, de l'idéal $\mathbf{M}_i$; son produit par ρ_i est donc encore une base arithmétique libre de l'idéal congru $(\rho_i) \times \mathbf{M}_i$, qui est précisément $\mathbf{M}_0$ (**24**). Notamment pour $i = 0$, on trouve la base canonique de $\mathbf{M}_0$: m_0 et $\theta - c_0$.

On peut calculer directement les α_i par la relation de récurrence, déduite de leur définition:

$$\alpha_0 = m_0; \qquad m_i \times \alpha_{i+1} = (\theta - c_i) \times \alpha_i.$$

Ils ont la même périodicité de multiplication que les multiplicateurs ρ_i; l'expression de ω résulte immédiatement de leur récurrence:

$$\alpha_{r+\mu h} = \alpha_r \times \omega^\mu; \qquad \omega = [\Pi(\theta - c_i)] : [\Pi m_i]; \qquad i \text{ de } 0 \text{ à } h-1.$$

On vérifie ci-dessous (**48**) par un calcul direct, que les α_i sont bien des entiers de l'idéal et on indique une loi de récurrence linéaire.

Exemples. — Corps de discriminant 145 (tableau XXII) et cycle engendré par l'idéal unité $\mathbf{M}_0 = (1,\ \theta - 5)$:

i	c_i	m_i	
..	..	..	
-1	5	6	$\alpha_{-1} = 1 : [(\theta - 5) : 6] = -\theta' + 5 = \theta + 6;$
0	**5**	**1**	$\alpha_0 = 1$
1	**0**	**6**	$\alpha_1 = 1 \times [(\theta - 5) : 1] = \theta - 5;$
2	**5**	**6**	$\alpha_2 = \alpha_1 \times [\theta : 6] = [(\theta - 5)\theta] : 6 = -\theta + 6$
3	5	1	$\alpha_3 = \alpha_2 \times [(\theta - 5) : 6] = (-\theta + 6) \times (\theta - 5) : 6 = 2\theta - 11 = \omega.$
..	..	..	... ...

Dans le cas d'un cycle d'un seul idéal $(1,\ \theta - c)$, les multiplicateurs ρ_i et les termes des bases α_i sont les puissances de $\theta - c$:

$$\ldots\ (\theta - c)^{-1} = -\theta' + c,\quad 1,\quad \theta - c,\quad (\theta - c)^2,\ \ldots$$

On peut caractériser les bases ainsi construites par des comparaisons de grandeurs entre leurs éléments et, éventuellement, avec les éléments de l'idéal, considérés comme des *nombres réels*. Pour ce faire il convient de distinguer les deux zéros (irrationnels, mais réels) de $F(x)$; on convient de désigner par θ (lettre non accentuée) celui qui est positif. On peut alors énoncer une autre condition de semi réduction.

Théorème caractéristique de semi réduction. — *Pour qu'un idéal* $\mathbf{M} = (m,\ \theta - c)$ *soit semi réduit*, et admette c comme racine finale, *il faut et il suffit que*: les nombres qui constituent sa base vérifient les conditions de comparaison:

$$0 < (\theta - c) : m < 1; \qquad (\theta' - c) : m < -1.$$

Les conditions de semi réduction peuvent être exprimées par le signe des valeurs de $F(x)$ pour les trois racines successives, encadrant la racine finale c:

$$F(c - m) < 0; \quad F(c) < 0; \quad F(c + m) > 0.$$

Il est équivalent de dire que $c - m$ et c sont compris entre les zéros θ' et θ et que $c + m$ est supérieur à θ (sans égalités possibles, $F(x)$ n'ayant pas de zéro rationnel). Cette condition peut être exprimée par:

$$\theta' < c - m < c < \theta < c + m \quad \Leftrightarrow \quad (\theta' - c) < -m < 0 < (\theta - c) < m$$
$$\Leftrightarrow \quad (\theta' - c) : m < -1 \quad \textit{et} \quad 0 < (\theta - c) : m < +1.$$

De cette condition, on déduit les propriétés suivantes des multiplicateurs ρ_i et de la suite des termes α_i des bases de $\mathbf{M}_0$.

Les multiplicateurs ρ_i sont positifs et tendent vers 0, lorsque i tend vers $+\infty$ et vers $+\infty$ lorsque i tend vers $-\infty$.

Les éléments α_i de la suite des bases réduites sont positifs décroissants, de $+\infty$ à 0 (pour i de $-\infty$ à $+\infty$).

Les conjugués α_i' de ces éléments sont alternativement positifs et négatifs; leurs valeurs absolues sont croissantes, de 0 à $+\infty$ (pour i de $-\infty$ à $+\infty$).

Les limites pour i infini des multiplicateurs ρ_i et des éléments α_i résultent de leur appartenance à des progressions géométriques. La raison ω, de ces progressions est le produit de quotients $(\theta—c_i):m_i$ (i de 0 à $h—1$) positifs et inférieurs à 1; elle est donc inférieure à 1, d'où les limites des termes des progressions.

La croissance des éléments α_i et de leurs conjugués α'_i, et la comparaison (des signes) des éléments consécutifs, résulte de leur construction au moyen des bases de $\mathbf{M}_i$, qui sont semi réduits:

$$\alpha_{i+1}:\alpha_i = [\rho_i\times(\theta—c_i)]:[\rho_i\times m_i] = (\theta—c_i):m_i < 1,$$
$$\alpha'_{i+1}:\alpha'_i = [\rho'_i\times(\theta'—c_i)]:[\rho'_i\times m_i] = (\theta'—c_i):m_i < —1.$$

47. Détermination des cycles.

La considération de la suite des bases de $\mathbf{M}_0$ permet d'établir que les cycles d'idéaux semi réduits représentent les classes *proprement.*

Théorème de la détermination des cycles. — Dans un corps réel, *chaque classe d'idéaux contient un et un seul cycle d'idéaux semi réduits.*

En définissant les idéaux (canoniques) réduits (**20**), pour un corps quadratique quelconque (réel ou imaginaire), il a été établi que toute classe d'idéaux contient au moins un idéal $\mathbf{M}_0$ réduit, qui, pour un corps réel, est, a fortiori, semi réduit (**40**). La classe renferme, par suite, le cycle des idéaux réduits $\mathbf{M}_i$, obtenus en formant les suivants successifs de $\mathbf{M}_0$, puisque ces idéaux sont congrus à $\mathbf{M}_0$.

Pour établir que le cycle ainsi construit est unique, on peut d'abord démontrer que:

dans un idéal $\mathbf{M}_0$ semi réduit, *pour qu'une base arithmétique libre*, de deux éléments positifs $\gamma_j > \gamma_{j+1}$, *appartienne à la suite des bases*, $\alpha_i\,\alpha_{i+1}$, associée au cycle d'idéaux semi réduits engendré par $\mathbf{M}_0$, *il faut et il suffit que*: ces termes et leurs conjugués vérifient les comparaisons:

$$\gamma_{j+1}:\gamma_j < 1; \qquad \gamma'_{j+1}:\gamma'_j < —1;$$

la première résulte de l'ordre adopté pour numéroter les deux termes.