

# 36. Corps imaginaires dont le discriminant a deux facteurs premiers.

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **7 (1961)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **22.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

au cours des déterminations successives, on a remplacé certains produits par des idéaux congrus, déjà calculés :

$$\mathbf{I} \times \mathbf{J}^3 \text{ par } \mathbf{I} \times \mathbf{J}'^2; \quad \mathbf{J}^4 \text{ par } \mathbf{J}'; \quad \mathbf{I}^2 \times \mathbf{J}^2 \text{ par } \mathbf{J} \times (\mathbf{I}^2 \times \mathbf{J});$$

$$\mathbf{I}^3 \times \mathbf{J}^2 \text{ par } \mathbf{I} \times (\mathbf{I}^2 \times \mathbf{J}^2).$$

On aurait aussi bien pu faire des calculs, en apparence plus directs. Par exemple un calcul de congruences arithmétiques donne :

$$\mathbf{I}^2 \times \mathbf{J}^2 = (25, \theta + 4) \times (49, \theta - 8) = (25 \times 49, \theta - 596).$$

La décomposition de  $F(596)$  donne la congruence :

$$F(596) = 358\,925 = (25 \times 49) \times 293 \Rightarrow \mathbf{I}^2 \times \mathbf{J}^2 \sim (293, \theta - 597).$$

Dans ce dernier idéal la racine minimum est  $-11$ ; la décomposition de  $F(-11) = F(10)$  donne alors la congruence :

$$F(-11) = 3\,223 = 293 \times 11 \Rightarrow \mathbf{I}^2 \times \mathbf{J}^2 \sim (11, \theta - 10) = (11, \theta + 1).$$

### 36. Corps imaginaires dont le discriminant a deux facteurs premiers.

Dans un corps quadratique imaginaire, *le groupe*, des classes d'idéaux, *ne contient qu'un seul élément d'ordre 2*, qui est une classe double, définie par un idéal réduit remarquable, si et seulement si *le discriminant n'a que deux facteurs premiers différents*, dont l'un peut être 2, à l'exposant 2 ou 3.

S'il en est ainsi *l'ordre du groupe* —ou le nombre des classes— *est pair*.

Si cet ordre n'a pas de facteur carré impair —ou est de la forme :

$$2^h \times P; \quad h \geq 0;$$

$P$  produit de nombres premiers impairs différents—

*le groupe est cyclique.*

La première propriété résulte du théorème d'existence des idéaux réduits remarquables (30). L'élément double unique est la classe définie, suivant les cas, par un idéal : double, ou réfléchi, de norme impaire (si  $|D|$  est impair); double, de norme 2, si  $|D|$  est pair.

En plus des deux classes, unité et double, il peut y avoir éventuellement des couples de classes conjuguées inégales, donc en tout un nombre pair.

Si un groupe, dont l'ordre est de la forme indiquée, n'est pas cyclique, il a une décomposition minimum en un produit de deux groupes cycliques, de générateurs **I** et **J**, dont les ordres, l'un étant diviseur de l'autre sont nécessairement :

$$m = 2^u, \quad n = 2^v \times P; \quad 0 < u \leq v;$$

il contiendrait alors au moins deux éléments d'ordre 2 :

$$\mathbf{I}^{m:2} \quad \mathbf{J}^{n:2};$$

ce ne peut donc être un groupe de classes de l'un des corps envisagés.

Le tableau XV, disposé comme le tableau XII, donne trois exemples de corps, dont le discriminant a deux facteurs premiers et dont le groupe de classes d'idéaux est cyclique. Pour chacun d'eux on a précisé la structure du groupe, en indiquant, pour chaque idéal réduit, sa congruence avec la puissance de l'un d'entre eux **I**, choisi (convenablement) pour définir une classe génératrice du groupe cyclique. On a limité à cette indication le prolongement de la table des valeurs en deçà de **O**. On a aussi transcrit un sommaire des calculs qui établissent cette structure.

Pour le *premier exemple*, la décomposition du discriminant (impair)  $-299 = 13 \times (-23)$  entraîne l'existence d'un *idéal réduit réfléchi*, —congru à son conjugué— :

$$F(2) = 9^2 \quad (9, \theta-2) \sim (9, \theta+3).$$

Il y a, d'autre part trois couples d'idéaux réduits conjugués, donc *huit classes*; leur groupe est cyclique, en raison de la remarque générale précédente (l'ordre n'a pas de facteur carré impair).

La table donne immédiatement des valeurs des idéaux conjugués **I** et **I'**, de *norme 5* (de racines minimum 0 et  $-1$ ), qui sont réduits et de leurs carrés, de *norme 25* et de mêmes racines, qui ne sont pas réduits. La décomposition de  $F(0) = 3^4 \times \mathbf{3}$  montre que ces carrés sont congrus aux idéaux réduits, de *norme 3*, de racines  $-1$  et  $0$ .

TABLEAU XV.

Exemples de corps imaginaires dont le discriminant  
a deux facteurs premiers.

$D = -299 = 13 \times (-23)$ $r = 5$ ; ordre <b>8</b>	$D = -404 = (-4) \times 101$ $r = 6$ ; ordre <b>14</b>	$D = -344 = 8 \times (-43)$ $r = 6$ ; ordre <b>10</b>																																																										
<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="width: 10%; text-align: center;">-2</td><td style="padding-left: 20px;"><math>(7, \theta+2) \sim \mathbf{I}^5</math></td></tr> <tr><td style="border-top: 1px solid black; text-align: center;">-1</td><td style="border-top: 1px solid black; padding-left: 20px;"><math>(5, \theta+1) \sim \mathbf{I}^7</math> <math>(3, \theta+1) \sim \mathbf{I}^2</math></td></tr> <tr><td style="border-top: 3px double black; text-align: center;">0</td><td style="border-top: 3px double black; padding-left: 20px;"><math>75 = 5^2 \times 3</math> <math>(1, \theta-0) = (1)</math> <math>(3, \theta-0) \sim \mathbf{I}^6</math> <math>(5, \theta-0) = \mathbf{I}</math></td></tr> <tr><td style="text-align: center;">+1</td><td style="padding-left: 20px;"><math>77 = 7 \times 11</math> <math>(7, \theta-1) \sim \mathbf{I}^3</math></td></tr> <tr><td style="text-align: center;">+2</td><td style="padding-left: 20px;"><math>81 = 3^4 = 9^2</math> <math>(9, \theta-2) \sim \mathbf{I}^4</math></td></tr> <tr><td style="text-align: center;">+3</td><td style="padding-left: 20px;"><math>87 = 3 \times 29</math></td></tr> <tr><td style="text-align: center;">+4</td><td style="padding-left: 20px;"><math>95 = 5 \times 19</math></td></tr> <tr><td style="border-top: 3px double black; text-align: center;">+5</td><td style="border-top: 3px double black; padding-left: 20px;"><math>107 = 15 \times 7</math></td></tr> </table>	-2	$(7, \theta+2) \sim \mathbf{I}^5$	-1	$(5, \theta+1) \sim \mathbf{I}^7$ $(3, \theta+1) \sim \mathbf{I}^2$	0	$75 = 5^2 \times 3$ $(1, \theta-0) = (1)$ $(3, \theta-0) \sim \mathbf{I}^6$ $(5, \theta-0) = \mathbf{I}$	+1	$77 = 7 \times 11$ $(7, \theta-1) \sim \mathbf{I}^3$	+2	$81 = 3^4 = 9^2$ $(9, \theta-2) \sim \mathbf{I}^4$	+3	$87 = 3 \times 29$	+4	$95 = 5 \times 19$	+5	$107 = 15 \times 7$	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="width: 10%; text-align: center;">-4</td><td style="padding-left: 20px;"><math>(9, \theta+4) \sim \mathbf{I}^2</math></td></tr> <tr><td style="border-top: 1px solid black; text-align: center;">-3</td><td style="border-top: 1px solid black; padding-left: 20px;"><math>(10, \theta+3) \sim \mathbf{I}^3</math></td></tr> <tr><td style="text-align: center;">-2</td><td style="padding-left: 20px;"><math>(7, \theta+2) \sim \mathbf{I}^9</math> <math>(5, \theta+2) \sim \mathbf{I}^4</math></td></tr> <tr><td style="text-align: center;">-1</td><td style="padding-left: 20px;"><math>(6, \theta+1) \sim \mathbf{I}^6</math> <math>(3, \theta+1) \sim \mathbf{I}^{13}</math></td></tr> <tr><td style="border-top: 3px double black; text-align: center;">0</td><td style="border-top: 3px double black; padding-left: 20px;"><math>101</math> <math>(1, \theta-0) = (1)</math></td></tr> <tr><td style="text-align: center;">+1</td><td style="padding-left: 20px;"><math>102 = 2 \times 3 \times 17</math> <math>(2, \theta-1) \sim \mathbf{I}^7</math> <math>(3, \theta-1) = \mathbf{I}</math> <math>(6, \theta-1) \sim \mathbf{I}^8</math></td></tr> <tr><td style="text-align: center;">+2</td><td style="padding-left: 20px;"><math>105 = (3 \times 5) \times 7</math> <math>(5, \theta-2) \sim \mathbf{I}^{10}</math> <math>(7, \theta-2) \sim \mathbf{I}^5</math></td></tr> <tr><td style="text-align: center;">+3</td><td style="padding-left: 20px;"><math>110 = 2 \times 5 \times 11</math> <math>(10, \theta-3) \sim \mathbf{I}^{11}</math></td></tr> <tr><td style="text-align: center;">+4</td><td style="padding-left: 20px;"><math>117 = 3^2 \times 13</math> <math>(9, \theta-4) = \mathbf{I}^2</math></td></tr> <tr><td style="text-align: center;">+5</td><td style="padding-left: 20px;"><math>122 = 2 \times 61</math></td></tr> <tr><td style="border-top: 3px double black; text-align: center;">+7</td><td style="border-top: 3px double black; padding-left: 20px;"><math>150 = 30 \times 5</math></td></tr> <tr><td style="text-align: center;">+13</td><td style="padding-left: 20px;"><math>270 = 27 \times 10</math></td></tr> </table>	-4	$(9, \theta+4) \sim \mathbf{I}^2$	-3	$(10, \theta+3) \sim \mathbf{I}^3$	-2	$(7, \theta+2) \sim \mathbf{I}^9$ $(5, \theta+2) \sim \mathbf{I}^4$	-1	$(6, \theta+1) \sim \mathbf{I}^6$ $(3, \theta+1) \sim \mathbf{I}^{13}$	0	$101$ $(1, \theta-0) = (1)$	+1	$102 = 2 \times 3 \times 17$ $(2, \theta-1) \sim \mathbf{I}^7$ $(3, \theta-1) = \mathbf{I}$ $(6, \theta-1) \sim \mathbf{I}^8$	+2	$105 = (3 \times 5) \times 7$ $(5, \theta-2) \sim \mathbf{I}^{10}$ $(7, \theta-2) \sim \mathbf{I}^5$	+3	$110 = 2 \times 5 \times 11$ $(10, \theta-3) \sim \mathbf{I}^{11}$	+4	$117 = 3^2 \times 13$ $(9, \theta-4) = \mathbf{I}^2$	+5	$122 = 2 \times 61$	+7	$150 = 30 \times 5$	+13	$270 = 27 \times 10$	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="width: 10%; text-align: center;">-2</td><td style="padding-left: 20px;"><math>(9, \theta+2) = \mathbf{I}^2</math> <math>(6, \theta+2) \sim \mathbf{I}^6</math> <math>(5, \theta+2) \sim \mathbf{I}^3</math></td></tr> <tr><td style="border-top: 1px solid black; text-align: center;">-1</td><td style="border-top: 1px solid black; padding-left: 20px;"><math>(3, \theta+1) \sim \mathbf{I}^9</math></td></tr> <tr><td style="border-top: 3px double black; text-align: center;">0</td><td style="border-top: 3px double black; padding-left: 20px;"><math>86 = 2 \times 43</math> <math>(1, \theta-0) = (1)</math> <math>(2, \theta-0) \sim \mathbf{I}^5</math></td></tr> <tr><td style="text-align: center;">+1</td><td style="padding-left: 20px;"><math>87 = 3 \times 29</math> <math>(3, \theta-1) = \mathbf{I}</math></td></tr> <tr><td style="text-align: center;">+2</td><td style="padding-left: 20px;"><math>90 = (3^2 \times 5) \times 2</math> <math>(5, \theta-2) \sim \mathbf{I}^7</math> <math>(6, \theta-2) \sim \mathbf{I}^4</math> <math>(9, \theta-2) \sim \mathbf{I}^8</math></td></tr> <tr><td style="text-align: center;">+3</td><td style="padding-left: 20px;"><math>95 = 5 \times 19</math></td></tr> <tr><td style="text-align: center;">+4</td><td style="padding-left: 20px;"><math>102 = 2 \times 3 \times 17</math></td></tr> <tr><td style="text-align: center;">+5</td><td style="padding-left: 20px;"><math>111 = 3 \times 37</math></td></tr> <tr><td style="border-top: 3px double black; text-align: center;">+7</td><td style="border-top: 3px double black; padding-left: 20px;"><math>135 = 27 \times 5</math></td></tr> </table>	-2	$(9, \theta+2) = \mathbf{I}^2$ $(6, \theta+2) \sim \mathbf{I}^6$ $(5, \theta+2) \sim \mathbf{I}^3$	-1	$(3, \theta+1) \sim \mathbf{I}^9$	0	$86 = 2 \times 43$ $(1, \theta-0) = (1)$ $(2, \theta-0) \sim \mathbf{I}^5$	+1	$87 = 3 \times 29$ $(3, \theta-1) = \mathbf{I}$	+2	$90 = (3^2 \times 5) \times 2$ $(5, \theta-2) \sim \mathbf{I}^7$ $(6, \theta-2) \sim \mathbf{I}^4$ $(9, \theta-2) \sim \mathbf{I}^8$	+3	$95 = 5 \times 19$	+4	$102 = 2 \times 3 \times 17$	+5	$111 = 3 \times 37$	+7	$135 = 27 \times 5$
-2	$(7, \theta+2) \sim \mathbf{I}^5$																																																											
-1	$(5, \theta+1) \sim \mathbf{I}^7$ $(3, \theta+1) \sim \mathbf{I}^2$																																																											
0	$75 = 5^2 \times 3$ $(1, \theta-0) = (1)$ $(3, \theta-0) \sim \mathbf{I}^6$ $(5, \theta-0) = \mathbf{I}$																																																											
+1	$77 = 7 \times 11$ $(7, \theta-1) \sim \mathbf{I}^3$																																																											
+2	$81 = 3^4 = 9^2$ $(9, \theta-2) \sim \mathbf{I}^4$																																																											
+3	$87 = 3 \times 29$																																																											
+4	$95 = 5 \times 19$																																																											
+5	$107 = 15 \times 7$																																																											
-4	$(9, \theta+4) \sim \mathbf{I}^2$																																																											
-3	$(10, \theta+3) \sim \mathbf{I}^3$																																																											
-2	$(7, \theta+2) \sim \mathbf{I}^9$ $(5, \theta+2) \sim \mathbf{I}^4$																																																											
-1	$(6, \theta+1) \sim \mathbf{I}^6$ $(3, \theta+1) \sim \mathbf{I}^{13}$																																																											
0	$101$ $(1, \theta-0) = (1)$																																																											
+1	$102 = 2 \times 3 \times 17$ $(2, \theta-1) \sim \mathbf{I}^7$ $(3, \theta-1) = \mathbf{I}$ $(6, \theta-1) \sim \mathbf{I}^8$																																																											
+2	$105 = (3 \times 5) \times 7$ $(5, \theta-2) \sim \mathbf{I}^{10}$ $(7, \theta-2) \sim \mathbf{I}^5$																																																											
+3	$110 = 2 \times 5 \times 11$ $(10, \theta-3) \sim \mathbf{I}^{11}$																																																											
+4	$117 = 3^2 \times 13$ $(9, \theta-4) = \mathbf{I}^2$																																																											
+5	$122 = 2 \times 61$																																																											
+7	$150 = 30 \times 5$																																																											
+13	$270 = 27 \times 10$																																																											
-2	$(9, \theta+2) = \mathbf{I}^2$ $(6, \theta+2) \sim \mathbf{I}^6$ $(5, \theta+2) \sim \mathbf{I}^3$																																																											
-1	$(3, \theta+1) \sim \mathbf{I}^9$																																																											
0	$86 = 2 \times 43$ $(1, \theta-0) = (1)$ $(2, \theta-0) \sim \mathbf{I}^5$																																																											
+1	$87 = 3 \times 29$ $(3, \theta-1) = \mathbf{I}$																																																											
+2	$90 = (3^2 \times 5) \times 2$ $(5, \theta-2) \sim \mathbf{I}^7$ $(6, \theta-2) \sim \mathbf{I}^4$ $(9, \theta-2) \sim \mathbf{I}^8$																																																											
+3	$95 = 5 \times 19$																																																											
+4	$102 = 2 \times 3 \times 17$																																																											
+5	$111 = 3 \times 37$																																																											
+7	$135 = 27 \times 5$																																																											

$\mathbf{I}^2 = (5^2, \theta-0)$		
$\sim (3, \theta+1); [F(0)]$		
$\mathbf{I}^8 \sim (3, \theta+1)^4$		
$\sim (1); [F(2)]$		
$\mathbf{I}^2 \times \mathbf{I} \sim (15, \theta-5)$		
$\sim (7, \theta-1), [F(5)]$		

  

$\mathbf{I}^3 = (3^3, \theta-7)$		
$\sim (5, \theta+2); [F(7)]$		
$\mathbf{I}^3 \times \mathbf{I}^2 \sim (45, \theta+2)$		
$\sim (2, \theta-0) [F(2)]$		

  

$\mathbf{I}^3 = (3^3, \theta-13) \sim (10, \theta+3); [F(13)]$		
$\mathbf{I}^3 \times \mathbf{I} \sim (30, \theta-7) \sim (5, \theta+2); [F(7)]$		
$\mathbf{I}^3 \times \mathbf{I}^2 \sim (2, \theta-0)$		

La décomposition de  $F(2) = 3^4$  montre que ces idéaux ont leur puissance d'exposant 4, congrue à (1). Il en résulte que les classes définies par  $\mathbf{I}$ , ou  $\mathbf{I}'$  sont d'ordre 8 et peuvent (chacune) servir de générateur au groupe cyclique, qui a le même ordre. Ces considérations donnent les puissances de  $\mathbf{I}$  qui sont congrues aux idéaux, de normes 5, 3, 9 (idéal réfléchi). Les produits des idéaux, de normes 3 et 5 (congrus à  $\mathbf{I}^2$  et  $\mathbf{I}$ , et à leurs conjugués respectifs) donnent des idéaux de norme 15 et de racines 5 et  $-6$ . La décomposition  $F(5) = 15 \times 7$ , adjointe à la table montre qu'ils sont congrus aux idéaux réduits de norme 7.

Dans le deuxième exemple, l'idéal de norme 2 est réduit double et il y a six couples d'idéaux réduits conjugués; en tout quatorze classes; leur groupe est cyclique, pour la même raison.

La table des valeurs donne immédiatement les couples d'idéaux conjugués réduits  $\mathbf{I}$  et  $\mathbf{I}'$ , de norme 3 et de racines (minimum) 1 et  $-1$  ainsi que leurs carrés, de norme 9 et de racines 4 et  $-4$ . Un calcul de congruence arithmétique (15) donne la forme canonique de leurs cubes, de norme 27 et de racines 13 et  $-13$ . La décomposition de  $F(13) = 27 \times 10$ , dont la valeur est adjointe à la table, montre que ces cubes sont congrus aux idéaux de norme 10 et de racines  $-3$  et 3.

En multipliant ces idéaux par ceux de norme 3, on obtient des idéaux congrus à  $\mathbf{I}^4$  et  $\mathbf{I}'^4$ , qui sont de norme 30 et de racines 7 et  $-7$ ; la décomposition de  $F(7) = 30 \times 5$ , aussi adjointe à la table, montre qu'ils sont congrus aux idéaux réduits, de norme 5.

En multipliant les idéaux réduits, ainsi obtenus congrus à  $\mathbf{I}^4$  et  $\mathbf{I}^3$

$$(\mathbf{10}, \theta+3) \times (\mathbf{5}, \theta+2)$$

$$(\mathbf{2}, \theta+1) \times (\mathbf{5}, \theta-2) \times (\mathbf{5}, \theta+2) \sim (\mathbf{2}, \theta+1)$$

on constate que  $\mathbf{I}^7$  est congru à l'idéal double (d'ordre 2). Les classes définies par  $\mathbf{I}$  et  $\mathbf{I}'$  sont donc d'ordre 14 et chacune d'elles est générateur du groupe.

On a obtenu, en même temps les puissances de  $\mathbf{I}$  congrues aux idéaux réduits, de normes 3, 9, 10, 5, et 2 (double). Un calcul de multiplication, immédiat, donne les idéaux de norme 6 et la décomposition de  $F(2)$  donne ceux de norme 7.

Dans le troisième exemple, l'idéal de norme 2 est double et il y a quatre couples d'idéaux conjugués réduits, en tout dix classes; leur groupe est cyclique.

TABLEAU XVI.

*Répartition, d'après l'ordre du groupe des classes  
des Corps quadratiques imaginaires, dont le discriminant  $D$  à deux facteurs premiers.*

Ordre	$ D $ impair		$ D  = 4p$	$ D  = 4 \times (2p)$
	Ideal réduit réfléchi	Ideal réduit double	$p$ premier impair	
2	$3 \times 5$ ; $5 \times 7$ ; $7 \times 13$ ; $11 \times 17$ ; $13 \times 31$ ;	$3 \times 17$ ; $5 \times 23$ ; $3 \times 41$ ; $5 \times 47$ ; $3 \times 89$ ; $7 \times 61$ ;	$4 \times 5$ ; $4 \times 13$ ; $4 \times 37$ ;	$8 \times 3$ ; $8 \times 5$ ; $8 \times 11$ ; $8 \times 29$ ;
4	$5 \times 11$ ; $17 \times 19$ ; $23 \times 29$ ;	$3 \times 13$ ; $5 \times 31$ ; $7 \times 29$ ; $3 \times 73$ ; $7 \times 37$ ; $3 \times 97$ ; $5 \times 71$ ; $3 \times 241$ ; $7 \times 109$ ; $5 \times 191$ ;	$4 \times 17$ ; $4 \times 73$ ; $4 \times 97$ ; $4 \times 193$ ;	$8 \times 7$ ; $8 \times 17$ ; $8 \times 23$ ; $8 \times 41$ ; $8 \times 71$ ;
6	$13 \times 19$ ;	$3 \times 29$ ; $3 \times 113$ ; $3 \times 137$ ; $11 \times 41$ ; $5 \times 103$ ; $7 \times 101$ ; $3 \times 257$ ; $5 \times 167$ ; $3 \times 281$ ;	$4 \times 29$ ; $4 \times 53$ ; $4 \times 61$ ; $4 \times 109$ ; $4 \times 157$ ;	$8 \times 13$ ; $8 \times 19$ ; $8 \times 53$ ; $8 \times 59$ ; $8 \times 101$ ; $8 \times 107$ ;
8	$13 \times 23$ ;	$5 \times 19$ ; $3 \times 37$ ; $3 \times 61$ ; $5 \times 59$ ; $7 \times 53$ ; $5 \times 79$ ; $3 \times 193$ ; $11 \times 53$ ; $3 \times 313$ ; $11 \times 89$ ; $5 \times 199$ ;	$4 \times 41$ ; $4 \times 113$ ; $4 \times 137$ ;	$8 \times 31$ ; $8 \times 47$ ; $8 \times 79$ ; $8 \times 89$ ; $8 \times 113$ ;
10	$7 \times 17$ ; $11 \times 13$ ; $11 \times 29$ ; $19 \times 41$ ; $23 \times 37$ ;	$3 \times 53$ ; $3 \times 101$ ; $5 \times 83$ ; $13 \times 47$ ; $5 \times 127$ ; $3 \times 233$ ; $11 \times 73$ ; $13 \times 71$ ;	$4 \times 181$ ; $4 \times 197$ ; $4 \times 229$ ;	$8 \times 37$ ; $8 \times 43$ ; $8 \times 61$ ; $8 \times 83$ ; $8 \times 109$ ;
12	$17 \times 43$ ;	$3 \times 109$ ; $3 \times 181$ ; $5 \times 131$ ; $3 \times 229$ ; $5 \times 151$ ;	$4 \times 89$ ; $4 \times 233$ ; $4 \times 241$ ;	»
14	$17 \times 23$ ; $19 \times 37$ ; $29 \times 31$ ;	$5 \times 43$ ; $7 \times 41$ ; $3 \times 149$ ; $7 \times 73$ ; $5 \times 107$ ; $3 \times 269$ ;	$4 \times 101$ ; $4 \times 149$ ; $4 \times 173$ ;	$8 \times 67$ ;
16	$17 \times 47$ ; $23 \times 41$ ;	$11 \times 37$ ; $3 \times 157$ ; $13 \times 43$ ; $5 \times 179$ ;	»	$8 \times 73$
18	$17 \times 31$ ;	$5 \times 67$ ; $3 \times 173$ ; $7 \times 97$ ;	»	»
20	»	»	»	$8 \times 97$ ; $8 \times 103$ ;

Ordre	D  impair		D  pair
	Idéal réduit réfléchi	Idéal réduit double	
22	»	3 × 197; 7 × 89; 13 × 59; 13 × 67; 3 × 293;	»
24	»	5 × 139;	»
26	19 × 29;	3 × 317;	»
28	»	3 × 277;	»
30	»	11 × 61; 5 × 163;	»
32	»	7 × 113;	»
34	»	»	»
36	»	7 × 137.	»

$$F(x) = x^2 + x + 240; \quad D = -959 = (-7) \times 137; \quad r = 9.$$

c	F(c)	Normes
0	240 = 2 <sup>4</sup> × 3 × 5	<b>2, 3, 4, 5, 6, 8,</b>
1	242 = 2 × 11 <sup>2</sup>	<b>10, 12, 15.</b>
2	246 = 2 × 3 × 41	<b>11.</b>
3	252 = 2 <sup>2</sup> × 3 <sup>2</sup> × 7	<b>6.</b>
4	260 = 2 <sup>2</sup> × 5 × 13	<b>7, 9, 12, 14.</b>
5	270 = 2 × 3 <sup>3</sup> × 5	<b>10, 13.</b>
6	282 = 2 × 3 × 47	<b>15.</b>
7	296 = 2 <sup>3</sup> × 37	
8	312 = 2 <sup>3</sup> × 3 × 13	
<hr/>		
9	330 = 2 × 3 × 5 × 11	

(2, 0-0)<sup>4</sup> × (3, 0-0) × (5, 0-0) ~ (1)

(2, 0+1)<sup>4</sup> × (3, 0-0)<sup>4</sup> ~ (1)

(2, 0-0) × (3, 0-0)<sup>3</sup> × (5, 0+1) ~ (1)

---

(2, 0-0) × (3, 0-0)<sup>8</sup> ~ (1)

(3, 0-0)<sup>36</sup> ~ (1)

La table des valeurs donne immédiatement les couples d'idéaux conjugués  $\mathbf{I}$  et  $\mathbf{I}'$ , réduits, de *norme 3* et de racines (minimum) 1 et  $-1$ , ainsi que leurs carrés, de *norme 9* et de racines  $-2$  et  $2$ . On calcule encore leurs cubes, qui sont de *normes 27* et de racines  $7$  et  $-7$ . La décomposition  $F(7) = 27 \times 5$ , adjointe à la table, montre qu'ils sont congrus aux idéaux, de *norme 5* et de racines  $-2$  et  $2$ .

Les produits des idéaux de norme 9 et 5, donnent des idéaux congrus à  $\mathbf{I}^5$  et  $\mathbf{I}'^5$ ; ils sont de *norme 45* et de racines  $+2$  et  $-2$ ; la décomposition de  $F(2) = 45 \times 2$  montrent qu'ils sont congrus à l'*idéal double* (d'ordre 2). Les idéaux  $\mathbf{I}$  et  $\mathbf{I}'$  définissent donc des classes d'ordre 10, qui peuvent servir chacune de générateur au groupe cyclique.

On a obtenu, en même temps les puissances de  $\mathbf{I}$ , qui sont congrues aux idéaux, de *normes 3, 9, 5, 2* (double); pour les idéaux de *norme 6*, elles s'obtiennent par un calcul immédiat de multiplication.

Comme dans ces exemples, on constate que, pour tous les corps, dont le discriminant est de valeur absolue inférieure à 1 000 et a seulement deux facteurs premiers différents, le groupe des classes d'idéaux est cyclique, son ordre étant un des nombres pairs de 2 à 36 [à l'exception des corps de discriminant  $-4$  et  $-8$ , qui sont principaux; (34)]. Le tableau XVI en donne une répartition, d'après l'ordre de leur groupe, en distinguant, pour les discriminants pairs, ceux qui ont un *facteur 4*, ou  $8$  et, pour les discriminants impairs la nature de l'idéal (unique) réduit remarquable: *réfléchi*, ou *double* (29).

On peut affirmer à priori que les groupes de ces différents corps sont cycliques, par la seule considération de leur ordre qui n'a pas de facteur impair carré. Il y a exception pour les quatre corps dont le groupe est d'ordre 18 et pour celui dont cet ordre est 36; il convient alors de faire une vérification.

On peut à cet effet chercher les idéaux réduits qui sont congrus aux puissances de l'un d'entre eux, convenablement choisi; ou former deux sous-groupes cycliques *indépendants*, dont le produit des ordres est égal à celui du groupe; si ces ordres sont premiers entre eux, le groupe est cyclique (26).

C'est ainsi que dans le corps de polynôme fondamental:

$$F(x) = x^2 + x + 170, \quad D = -679 = (-7) \times 97,$$



l'idéal réduit  $(2, \theta-0)$  engendre un sous-groupe cyclique, d'ordre 9, qui ne contient pas la classe double définie par l'idéal réduit de norme 7, diviseur de  $D$ . Le groupe qui a dix-huit classes est égal au produit direct du sous-groupe cyclique d'ordre 9 et de celui d'ordre 2, engendré par la classe double. Il est donc cyclique d'ordre 18.

On peut dans certains cas faire une vérification plus rapide, qui n'exige pas le calcul complet de la structure. Un exemple en est donné pour le corps de *discriminant*  $-959 = (-7) \times 137$ , dont le groupe est d'ordre 36: (suite du *tableau XVI*).

On a seulement indiqué, dans le tableau de valeurs, les normes des idéaux réduits; il y en a six qui sont des nombres premiers 2, 3, 5, 7 (idéal double), 11, 13. On s'occupe d'abord des relations entre les idéaux correspondants. Les décompositions de:

$$F(0) = F(-1), \quad F(3) = F(-4), \quad F(5) = F(-6)$$

donnent des relations entre les idéaux, des quatre premières normes, sous formes de monômes congrus à (1). On peut remplacer chaque monôme par celui des idéaux conjugués; c'est ce qui a été fait en utilisant la décomposition de  $F(-6)$  au lieu de  $F(5)$ . Le monôme qui résulte de la décomposition de  $F(3)$  contient l'idéal double, de norme 7, dont le carré est congru à (1), le carré de ce monôme qui est toujours congru à (1), est alors congru à un monôme des seuls idéaux, de normes 2 et 3.

On a ainsi formé trois monômes, des idéaux de normes 2, 3, 5, respectivement congrus à (1). En les multipliant convenablement, on peut obtenir des relations plus simples (le produit de deux idéaux conjugués est congru à (1) et peut être supprimé dans un monôme). On obtient notamment en formant le produit des trois monômes [l'idéal  $(3, \theta-0)$  étant désigné par  $\mathbf{I}$ ]:

$$(2, \theta-0) \times \mathbf{I}^8 \sim (1) \quad \Leftrightarrow \quad (2, \theta+1) \sim \mathbf{I}^8;$$

puis par combinaison avec la deuxième relation:

$$\mathbf{I}^{36} \sim (1); \quad (3, \theta+1) \sim \mathbf{I}^{35}; \quad (2, \theta-0) \sim \mathbf{I}^{28}.$$

Les décompositions résultant de la table, permettent alors de former les puissances de  $\mathbf{I}$ , auxquelles sont congrus les idéaux réduits de normes: 5 [ $F(0)$ ]; 13 [ $F(8)$ ]; 11 [ $F(9)$  adjoint à la table]; 7 [ $F(3)$ ]; pour ce dernier dont l'ordre est 2, on peut affirmer a priori, qu'il est

congru à  $\mathbf{I}^{18}$ . Les expressions des autres idéaux réduits dont les normes sont composées avec ces nombres premiers s'obtiennent par multiplication.

Comme dans le cas d'un discriminant premier, il semble que ce soit seulement pour des valeurs relativement grandes de  $|D|$  qu'il soit possible d'obtenir des groupes de classes non cycliques. Un exemple en est donné dans le tableau XVII, disposé comme le tableau XIV, qui concerne le corps de discriminant  $-19\,451 = (-43) \times 437$ .

Il a dix-huit classes d'idéaux, dont une classe double représentée par l'idéal réduit double de norme 43. Leur groupe n'est pas cyclique: il a une *décomposition minimum* en un produit direct de sous-groupes cycliques d'ordres 3 et 6 et ses éléments peuvent être représentés par les monômes (indiqués dans le tableau):

$$\mathbf{I}^x \times \mathbf{J}^y; \quad x, \text{ mod. } 3; \quad y, \text{ mod. } 6.$$

La vérification peut être faite comme suit: la décomposition de  $F(0) = 17^3$  montre que les idéaux de norme 17, forment avec (1), un *sous-groupe cyclique*, d'ordre 3. La décomposition de  $F(21) = 5^3 \times 43$  montre que les idéaux, de normes 5 et 25 ont leur troisième puissance congru à l'idéal double, de norme 7; ils définissent, par suite, avec cet idéal et (1), un *sous-groupe de six classes, cyclique*, indépendant du précédent (dont il ne contient pas d'élément, sauf (1)). Le groupe est donc égal au produit direct de ces deux sous-groupes; il n'a aucun élément d'ordre 18 et il n'est pas cyclique.

On peut préciser sa structure en calculant les idéaux réduits congrus aux divers monômes en  $\mathbf{I}$  et  $\mathbf{J}$ ; c'est ce qui a été indiqué dans le tableau; la première congruence résulte d'un calcul de multiplication d'idéaux canoniques, de normes premières entre elles, obtenus successivement:

$$\mathbf{I} \times \mathbf{J}; \quad \mathbf{I} \times (\mathbf{I} \times \mathbf{J}); \quad \mathbf{I} \times (\mathbf{I} \times \mathbf{J}^2); \quad \mathbf{I} \times (\mathbf{I} \times \mathbf{J}^3); \quad \mathbf{I} \times \mathbf{J}'.$$

### 37. Corps imaginaires, dont le discriminant a plus de deux facteurs premiers.

Le discriminant est alors décomposable, au moins de deux façons, en un produit de deux facteurs. Il en résulte l'existence