

28. Exemples de calculs.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **6 (1960)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

28. Exemples de calculs.

Le tableau V donne les valeurs pour x de 0 à $H = 100$, du trinôme $F(x)$ déjà utilisé (tableaux I et III), de discriminant $D = -39$. Le rang r (25) est égal à 2.

Les deux premières valeurs de $F(x)$, ont pour diviseurs premiers **2, 3, 5**, qui sont des diviseurs de $F(x)$, pour les valeurs respectives:

$$0+2\lambda, 1+2\lambda; \quad 0+5\lambda, 4+5\lambda; \quad 1+3\lambda.$$

Il n'y a qu'une progression pour 3, qui est diviseur de D .

On a inscrit devant chaque valeur de la table, le monôme des puissances des facteurs 2, 3, 5, qui en est diviseur, de façon à calculer les quotients q_x . Les périodicités, ou les progressions sont mises en évidence par l'alignement (vertical) de ces facteurs.

Le premier quotient, rencontré ensuite, qui soit différent de 1 est $F(3):2 = \mathbf{11}$. Il est premier, on l'a inscrit devant les valeurs dont il est diviseur et qui sont données par les progressions de raison 11 et de premiers termes 3 et 7. Deux seulement $F(51)$ et $F(69)$ sont divisibles par une puissance supérieure de 11; les autres appartenant à des progressions de raison 11^2 sont extérieures à la table.

Le premier quotient obtenu ensuite, qui soit différent de 1 est $F(6):2^2 = \mathbf{13}$. C'est un nombre premier, diviseur de D ; il n'est obtenu que pour les valeurs d'une seule progression $6+13\lambda$, et seulement à la première puissance.

Les quotients suivants, jusqu'à $F(13)$ exclus, qui devient supérieur à $(2 \times 6 + 1)^2 = 169$, sont égaux à 1, ou sont premiers:

$$F(7): (2 \times 3 \times 11) = 1; \quad F(8): 2 = \mathbf{41}; \quad F(9): (2^2 \times 5^2) = 1; \\ F(10): (2^3 \times 3 \times 5) = 1; \quad F(11): 2 = \mathbf{71}; \quad F(12): 2 = \mathbf{83}.$$

On inscrit ces nombres premiers devant les valeurs de la table, dont ils sont diviseurs, et qui sont données par:

$$\mathbf{41} \text{ pour } x = 8, 49, 90; \quad 32, 73; \quad \mathbf{71} \text{ pour } x = 11, 82; \quad 59; \\ \mathbf{83} \text{ pour } x = 12, 95; \quad 70;$$

ils n'y figurent qu'à la première puissance.

Le premier quotient différent de 1, qui est rencontré ensuite est $F(16): (2 \times 3) = \mathbf{47}$; il est premier et il en est de même de ceux des

quotients suivants, qui sont différents de 1, jusqu'à $F(33)$ exclus, qui est supérieur à $(2 \times 16 + 1)^2 = 1\ 089$. Certains sont encore diviseurs d'autres valeurs du tableau, ce sont :

47 pour $x = 16, 63; 30, 77;$ **79** pour $x = 17, 96; 61;$
43 pour $x = 20, 63; 22, 65;$ **59** pour $x = 21, 80; 37, 96;$
61 pour $x = 24, 85; 36, 97;$ **89** pour $x = 26; 62.$

Par contre, les diviseurs premiers **281, 383, 137**, ne se rencontrent plus dans le tableau, limité à $H = 100$.

Le premier quotient rencontré ensuite, est $F(33): 2^2 = \mathbf{283}$; il est premier et il en est de même de ceux des quotients suivants qui sont différents de 1 jusqu'à $F(67)$ exclus qui est supérieur à $(2 \times 33 + 1)^2 = 4\ 489$. Dans ces quotients, ceux qui figurent plus d'une fois dans le tableau, limité à $H = 100$, sont :

127 pour $x = 35; 91;$ **103** pour $x = 47; 55;$
149 pour $x = 54; 94;$ **139** pour $x = 64; 74.$

Le premier quotient rencontré ensuite est $F(67): (2 \times 3) = \mathbf{761}$; il est premier et il en est de même de tous les quotients suivants de la table, car $(2 \times 67 + 1)^2 = 18\ 225$ est supérieur à $F(100)$.

Dans la table, les nombres en caractères gras sont les facteurs p rencontrés pour leur racine minimum \bar{c}_p (ou pour la première fois).

On rappelle qu'il a été indiqué ci-dessus que les nombres premiers ainsi obtenus sont ceux qui appartiennent à douze progressions arithmétiques de raison commune 39.

Le *deuxième exemple*, donné dans le tableau VI, est constitué par les valeurs pour x de O à $H = 100$, du trinôme, de discriminant D positif (définissant un corps réel) :

$$F(x) = x^2 - 47; \quad D = (-4) \times (-47) = 188.$$

Les valeurs sont négatives et de valeurs absolues décroissantes jusqu'à $F(6)$; elles sont ensuite positives et croissantes.

Le rang r est égal à 4, car :

$$5 \times (2 \times 3)^2 = 180 < 4 \times 47 < 5 \times (2 \times 4)^2 = 320.$$

Les quatre premières valeurs de $F(x)$ ont pour diviseurs premiers : **2, 47**, qui sont diviseurs de D , et **23, 43, 19**. On inscrit devant chaque valeur les monômes de ces facteurs qui en sont des diviseurs.

TABLEAU V. $F(x) = x^2 + x + 10$ $D = -39 = (-3) \times 13$ $r = 2$.

c	F(c)	Diviseurs
0	10	2. 5
1	12	2 ² . 3
2	16	2 ⁴
3	22	2. 11
4	30	2. 3. 5
5	40	2 ³ . 5
6	52	2 ² . 13
7	66	2. 3. 11
8	82	2. 41
9	100	2 ² . 5 ²
10	120	2 ³ . 3. 5
11	142	2. 71
12	166	2. 83
13	192	2 ⁶ . 3
14	220	2 ² . 5. 11
15	250	2. 5 ³
16	282	2. 3. 47
17	316	2 ² . 79
18	352	2 ⁵ . 11
19	390	2. 3. 5. 13
20	430	2. 5. 43
21	472	2 ³ . 59
22	516	2 ² . 3. 43
23	562	2. 281
24	610	2. 5. 61

c	F(c)	Diviseurs
25	660	2 ² . 3. 5. 11
26	712	2 ³ . 89
27	766	2. 383
28	822	2. 3. 137
29	880	2 ⁴ . 5. 11
30	940	2 ² . 5. 47
31	1002	2. 3. 167
32	1066	2. 13. 41
33	1132	2 ² . 283
34	1200	2 ⁴ . 3. 5 ²
35	1270	2. 5. 127
36	1342	2. 11. 61
37	1416	2 ³ . 3. 59
38	1492	2 ² . 373
39	1570	2. 5. 157
40	1650	2. 3. 5 ² . 11
41	1732	2 ² . 433
42	1816	2 ³ . 227
43	1902	2. 3. 317
44	1990	2. 5. 199
45	2080	2 ⁵ . 5. 13
46	2172	2 ² . 3. 181
47	2266	2. 11. 103
48	2362	2. 1181
49	2460	2 ² . 3. 5. 41

c	F(c)	Diviseurs
50	2560	2 ⁹ . 5.
51	2662	2. 11 ³
52	2766	2. 3. 461
53	2872	2 ³ . 359
54	2980	2 ² . 5. 149
55	3090	2. 3. 5. 103
56	3202	2. 1601
57	3316	2 ² . 829
58	3432	2 ³ . 3. 11. 13
59	3550	2. 5 ² . 71
60	3670	2. 5. 367
61	3792	2 ⁴ . 3. 79
62	3916	2 ² . 11. 89
63	4042	2. 43. 47
64	4170	2. 3. 5. 139
65	4300	2 ² . 5 ² . 43
66	4432	2 ⁴ . 277
67	4566	2. 3. 761
68	4702	2. 2351
69	4840	2 ³ . 5. 11 ²
70	4980	2 ² . 3. 5. 83
71	5122	2. 13. 197
72	5266	2. 2633
73	5412	2 ² . 3. 11. 41
74	5560	2 ³ . 5. 139

c	F(c)	Diviseurs
75	5710	2. 5. 571
76	5862	2. 3. 977
77	6016	2 ⁷ . 47
78	6172	2 ² . 1543
79	6330	2. 3. 5. 211
80	6490	2. 5. 11. 59
81	6652	2 ² . 1663
82	6816	2 ⁵ . 3. 71
83	6982	2. 3491
84	7150	2. 5 ² . 11. 13
85	7320	2 ³ . 3. 5. 61
86	7492	2 ² . 1873
87	7666	2. 3833
88	7842	2. 3. 1307
89	8020	2 ² . 5. 401
90	8200	2 ³ . 5 ² . 41
91	8382	2. 3. 11. 127
92	8566	2. 4283
93	8752	2 ⁴ . 547
94	8940	2 ² . 3. 5. 149
95	9130	2. 5. 11. 83
96	9322	2. 59. 79
97	9516	2 ² . 3. 13. 61
98	9712	2 ⁴ . 607
99	9910	2. 5. 991
100	10110	2. 3. 5. 337

Les quotients suivants, pour les valeurs de x , définies par:

$$|F(x)| \leq (2 \times 4)^2 \Rightarrow x \leq 10$$

sont uniquement des valeurs, ou des moitiés de valeurs du polynôme puisqu'à l'exception du diviseur 2, la première valeur devant laquelle on a inscrit un des diviseurs précédents est $F(16)$ divisible par 19. Ce sont:

$$F(4) = -\mathbf{31}; \quad F(5):2 = -\mathbf{11}; \quad F(6) = -11; \quad F(7):2 = +2; \\ F(8) = +\mathbf{17}; \quad F(9):2 = +17; \quad F(10) = +\mathbf{53}.$$

On les inscrit devant les valeurs suivantes de la table qu'ils divisent, éventuellement avec l'exposant convenable.

Le quotient suivant $F(11):2 = +\mathbf{37}$ est premier; ceux qui suivent pour les valeurs de x :

$$|F(x)| \leq (2 \times 11)^2 \Rightarrow x \leq 23,$$

sont égaux à 1, ou sont premiers. Ces derniers sont encore égaux aux valeurs, ou aux moitiés des valeurs du polynôme; les seuls quotients donnés par des diviseurs déjà inscrits, à l'exception de 2, sont:

$$F(16):(19 \times 11) = +1; \quad F(22):(23 \times 19) = +1.$$

Les seuls nombres premiers ainsi obtenus qui figurent encore dans la table, limitée à $H = 100$, sont **37, 97, 61, 89**.

Le premier quotient suivant qui est différent de 1 est $F(28):11 = \mathbf{67}$, ceux qui suivent pour les valeurs de x :

$$|F(x)| \leq (2 \times 28)^2 \Rightarrow x \leq 56,$$

sont égaux à 1 ou premiers; ceux qui figurent plus d'une fois dans la table sont: **67, 127, 101, 107, 151**.

Au-delà de $x = 56$, tous les quotients sont premiers ou égaux à 1.

La disposition typographique est semblable à celle de l'exemple précédent, les nombres premiers obtenus pour la première fois (pour leur racine minimum) sont en caractères gras.

L'application de la loi de la réciprocité (22) montre que les nombres premiers ainsi obtenus sont ceux qui appartiennent à $\varphi(168):2 = 46$ progressions arithmétiques, de raison commune 168 et de premiers termes: 1, 9, 11, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 31, 35, 37, 39, 43, 49, 53, 61, 65, 67, 81, 87, 89, 91, 97, 99, 101, 107, 121, 123, 127, 135, 139, 145, 149, 151, 153, 157, 163, 165, 167, 169, 171, 173, 177, 179, 187.

TABLEAU VI.

$$F(x) = x^2 - 47 \quad D = 188 = (-4) \times (-47) \quad r = 4.$$

c	F(c)	Diviseurs
0	-47	47
1	-46	2. 23
2	-43	43
3	-38	2. 19
4	-31	31
5	-22	2. 11
6	-11	11
7	+	2.
8	17	17
9	34	2. 17
10	53	53
11	74	2. 37
12	97	97
13	122	2. 61
14	149	149
15	178	2. 89
16	209	19. 11
17	242	2. 11 ²
18	277	277
19	314	2. 157
20	353	353
21	394	2. 197
22	437	23. 19
23	482	2. 241
24	529	23 ²

c	F(c)	Diviseurs
25	578	2. 17 ²
26	629	17. 37
27	682	2. 31. 11
28	737	11. 67
29	794	2. 397
30	853	853
31	914	2. 457
32	977	977
33	1 042	2. 521
34	1 109	1 109
35	1 178	2. 19. 31
36	1 249	1 249
37	1 322	2. 661
38	1 397	11. 127
39	1 474	2. 11. 67
40	1 553	1 553
41	1 634	2. 43. 19
42	1 717	17. 101
43	1 802	2. 17. 53
44	1 889	1 889
45	1 978	2. 23. 43
46	2 069	2 069
47	2 162	2. 47. 23
48	2 257	37. 61
49	2 354	2. 11. 107

c	F(c)	Diviseurs
50	2 453	11. 223
51	2 554	2. 1 277
52	2 657	2 657
53	2 762	2. 1 381
54	2 869	19. 151
55	2 978	2. 1 489
56	3 089	3 089
57	3 202	2. 1 601
58	3 317	31. 107
59	3 434	2. 17. 101
60	3 553	19. 11. 17
61	3 674	2. 11. 167
62	3 797	3 797
63	3 922	2. 53. 37
64	4 049	4 049
65	4 178	2. 2 089
66	4 309	31. 139
67	4 442	2. 2 221
68	4 577	23. 199
69	4 714	2. 2 357
70	4 853	23. 211
71	4 994	2. 11. 227
72	5 137	11. 467
73	5 282	2. 19. 139
74	5 429	61. 89

c	F(c)	Diviseurs
75	5 578	2. 2 789
76	5 729	17. 337
77	5 882	2. 17. 173
78	6 037	6 037
79	6 194	2. 19. 163
80	6 353	6 353
81	6 514	2. 3 257
82	6 677	11. 607
83	6 842	2. 11. 311
84	7 009	43. 163
85	7 178	2. 37. 97
86	7 349	7 349
87	7 522	2. 3 761
88	7 697	43. 179
89	7 874	2. 31. 127
90	8 053	8 053
91	8 234	2. 23. 179
92	8 417	19. 443
93	8 602	2. 23. 11. 17
94	8 789	47. 11. 17.
95	8 978	2. 67 ² .
96	9 169	53. 173
97	9 362	2. 31. 151
98	9 557	19. 503
99	9 754	2. 4 877
100	9 953	37. 269