

## 2, 3. Sous-espaces disjoints non orthogonaux.

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **6 (1960)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.04.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

$$\Delta_a = \frac{l_f^* \mathfrak{z} - a}{\sigma \sqrt{(l_f^* l_f)}} : \frac{\sqrt{\text{SCE}}}{\sigma \sqrt{(n-r)}} = \frac{(l_f^* \mathfrak{z} - a) \sqrt{(n-r)}}{\sqrt{[(l_f^* l_f) \text{SCE}]}}$$

est une aléatoire  $t_{n-r}$ , ce qui permet d'éprouver l'hypothèse en question ou d'estimer  $f^* b$ .

2, 24. Soient  $f_1^* b, \dots, f_s^* b$  des combinaisons estimables, linéairement indépendantes, et  $l_{f_i}^* \mathfrak{z}$  ( $i = 1, \dots, s$ ) leurs estimateurs privilégiés. **Sous l'hypothèse**  $f_1^* b = \dots = f_s^* b = 0$ , les moyennes des  $l_{f_i}^* \mathfrak{z}$  sont toutes nulles, et donc  $(1/\sigma^2) \text{SC}\{l_{f_1}^*, \dots, l_{f_s}^*\}$  est une aléatoire  $\chi_s^2$ ; cela entraîne que

$$Q = \frac{\text{SC}\{l_{f_1}^*, \dots, l_{f_s}^*\}/s}{\text{SCE}/(n-r)}$$

est une aléatoire  $F_{s, n-r}$ . Si l'hypothèse en question est fausse,  $Q$  est, en loi, plus grande que  $F_{s, n-r}$ ; on éprouvera donc cette hypothèse en comparant la valeur observée de  $Q$  à  $F_{s, n-r}$ , les grandes valeurs de  $Q$  étant critiques.

**Remarque.** — Il est manifeste que, si  $\alpha$  est un nombre certain quelconque, on a  $\text{SC}\{\alpha \omega^*\} = \text{SC}\{\omega^*\}$ . On peut donc négliger un facteur constant dans le calcul d'une somme de carrés. Il n'en est pas de même dans le calcul de l'expression  $\Delta_a$  du § 2, 33.

### 2, 3. Sous-espaces disjoints non orthogonaux.

2, 31. Soient  $U_q^*$  et  $U_{r-q}^*$  deux sous-espaces complémentaires de  $V_+$ , de dimensions  $q$  et  $r - q$ :  $V_+ = U_q^* \oplus U_{r-q}^*$ ; on ne suppose pas que  $U_q^*$  et  $U_{r-q}^*$  sont mutuellement orthogonaux. On cherche à interpréter  $\text{SC } U_q^*$  et  $\text{SC } U_{r-q}^*$ . Pour cela, on considère, outre le modèle initial, le modèle où

$$(l^* \in U_{r-q}^*) \quad \text{implique} \quad \mathbf{E} l^* \mathfrak{z} = 0, \quad (11)$$

tandis que  $(l^* \in U_q^*)$  implique  $\mathbf{E} l^* \mathfrak{z} \neq 0$  pour une valeur au moins de  $b$ .

[On pourrait décrire ce modèle ainsi: soit  $l_1^*, \dots, l_q^*$  une base de  $U_q^*$ ,  $l_{q+1}^*, \dots, l_r^*$  une base de  $U_{r-q}^*$ , et  $\mathfrak{B}$  telle que, dans le modèle initial,

$$\hat{b}_H = \mathfrak{B} [l_1^* \mathfrak{z} \dots, l_r^* \mathfrak{z}]^T, \quad \mathbf{E} \mathfrak{z} = \mathfrak{A} \mathfrak{B}^{-1} \mathfrak{B} b = \mathfrak{A} \mathfrak{B}^{-1} w;$$

le nouveau modèle est

$$\mathbf{E}^* = \mathfrak{A} \mathfrak{B}^{-1} \mathfrak{B} \mathfrak{w}, \quad \mathfrak{B} = \begin{bmatrix} \mathfrak{S}_q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Soient  $\mathbf{SCN}_q$  et  $\mathbf{SCE}_{n-q}$  les sommes de carrés normale et des erreurs pour le nouveau modèle,  $\mathbf{SCN}_r$  et  $\mathbf{SCE}_{n-r}$  les sommes homologues du modèle initial. On a

$$\mathbf{SCU}_{r-q}^* = \mathbf{SCE}_{n-q} - \mathbf{SCE}_{n-r}.$$

En effet, en notant  $\mathbf{U}'_q$  le complément orthogonal de  $\mathbf{U}_{r-q}^*$ , on a

$$\begin{aligned} \mathbf{SCT} &= \mathbf{SCU}'_q + \mathbf{SCU}_{r-q}^* + \mathbf{SCE}_{n-r} \\ &= \mathbf{SCN}_q + \mathbf{SCE}_{n-q}; \end{aligned}$$

or, de quoi se compose l'espace des erreurs du nouveau modèle,  $\mathbf{V}_{0, n-q}$ ? il contient évidemment  $\mathbf{V}_0$ , puis un sous-espace de  $\mathbf{V}^*$ , de dimensions  $r - q$ , disjoint de  $\mathbf{V}_0$ ; par ailleurs,  $\mathbf{U}_{r-q}^*$  appartient à  $\mathbf{V}_{0, n-q}$  en vertu de (11), et est de dimension  $r - q$ ; donc

$$\mathbf{V}_{0, n-q} = \mathbf{V}_0 \oplus \mathbf{U}_{r-q}^*;$$

en outre,  $\mathbf{V}_0$  et  $\mathbf{U}_{r-q}^* \subset \mathbf{V}_+$  sont mutuellement orthogonaux, donc

$$\begin{aligned} \mathbf{SCE}_{n-q} &\equiv \mathbf{SCV}_{0, n-q} = \mathbf{SCV}_0 + \mathbf{SCU}_{r-q}^* \\ &= \mathbf{SCE}_{n-r} + \mathbf{SCU}_{r-q}^*, \end{aligned}$$

d'où la thèse; on voit en outre que  $\mathbf{SCN}_q = \mathbf{SCU}'_q \neq \mathbf{SCU}_q^*$ .

2, 32. Il est commode d'introduire la notation suivante <sup>12)</sup>:

$$\begin{aligned} \mathbf{SCT} - \mathbf{SCE}_{n-q} &= \mathbf{red} [\mathbf{U}_q^*], \\ \mathbf{SCE}_{n-q} - \mathbf{SCE}_{n-r} &= \mathbf{red} [\mathbf{U}_{r-q}^* \mid \mathbf{U}_q^*] (\neq \mathbf{red} [\mathbf{U}_{r-q}^*]). \end{aligned}$$

On a alors

$$\mathbf{SCT} = \mathbf{red} [\mathbf{U}_q^*] + \mathbf{red} [\mathbf{U}_{r-q}^* \mid \mathbf{U}_q^*] + \mathbf{SCE}_{n-r}$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{red} [\mathbf{U}_{r-q}^* \mid \mathbf{U}_q^*] &= \mathbf{SCU}_{r-q}^*, \\ \mathbf{red} [\mathbf{U}_q^*] &= \mathbf{SCU}'_q \neq \mathbf{SCU}_q^*. \end{aligned}$$

Bien entendu, les relations obtenues en permutant les rôles de  $\mathbf{U}_q^*$  et  $\mathbf{U}_{r-q}^*$  sont aussi valables; ces rôles ne sont évidemment

pas symétriques, à moins que  $U_q^*$  et  $U_{r-q}^*$  ne soient mutuellement orthogonaux; dans ce dernier cas,

$$\begin{aligned} \text{red } [U_q^*] &= \text{red } [U_q^* \mid U_{r-q}^*] = \text{SC } U_q^* , \\ \text{red } [U_{r-q}^*] &= \text{red } [U_{r-q}^* \mid U_q^*] = \text{SC } U_{r-q}^* . \end{aligned}$$

2, 33. Ces considérations s'étendent aisément au cas où  $V_+$  est décomposé en plus de deux sous-espaces, suivant le schéma

$$\begin{cases} V_+ = U_1^* \oplus U_2^* \oplus \dots \oplus U_t^* , \\ \dim U_i^* = r_i , \quad r_1 + \dots + r_t = \rho_k ; \rho_t = r . \end{cases}$$

On doit alors considérer  $t$  modèles successifs (et l'ordre dans lequel ces modèles font intervenir les  $U_i^*$  est essentiel); le  $k^{\text{ème}}$  de ces modèles est caractérisé par

$$\left[ l^* \in \bigoplus_{k+1}^t U_i^* \right] \text{ implique } \mathbf{E} l^* \neq 0 \quad (k = 1, 2, \dots, t-1) ,$$

le  $t^{\text{ème}}$  étant le modèle initial. On note  $\text{SCE}_{n-\rho_k}$  la somme de carrés des erreurs attachée au  $k^{\text{ème}}$  modèle, et on montre sans peine que

$$\text{SC} \left( \bigoplus_{k+1}^t U_i^* \right) = \text{SCE}_{n-\rho_k} - \text{SCE}_{n-r} ;$$

on pose alors

$$\begin{aligned} \text{red } [U_1^*] &= \text{SCT} - \text{SCE}_{n-\rho_1} \\ \text{red } [U_{k+1}^* \mid U_1^*, \dots, U_k^*] &= \text{SCE}_{n-\rho_k} - \text{SCE}_{n-\rho_{k+1}} , \end{aligned}$$

et on a

$$\text{SCN} = \text{red } [U_1^*] + \sum_1^{t-1} \text{red } [U_{k+1}^* \mid U_1^*, \dots, U_k^*] , \quad (12)$$

avec

$$\text{red } [U_t^* \mid U_1^*, \dots, U_{t-1}^*] = \text{SC } U_t^* ,$$

cette dernière relation n'étant pas généralement vraie pour les autres  $U_i^*$  (exception évidente: le cas où les  $U_i^*$  sont mutuellement orthogonaux).

#### 2, 4. *Ecart au modèle.*

Tout ce qui précède est valide si, réellement,  $\mathbf{E} \neq \mathcal{A}b$ . S'il n'en est pas nécessairement ainsi, ce qui arrive lorsque le modèle