1,2. Estimateurs privilégiés.

$$\mathbf{E}\,(\mathfrak{l}^\star\,\mathfrak{x}) = \mathfrak{l}^\star\,\mathbf{E}\,\mathfrak{x} = \mathfrak{l}^\star\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{b}\ , \tag{4}$$

d'où

$$\mathfrak{E}:\ \mathfrak{l}^\star \to \mathfrak{l}^\star\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{b}\ .$$ [8])

$\mathfrak{E}$ est évidemment de rang r.

1, 14. Le noyau de $\mathfrak{E}$ (sous-espace V_0 de $\mathsf{V}^\star$ formé des vecteurs $\mathfrak{l}^\star$ tels que $\mathfrak{E}\,\mathfrak{l}^\star$ soit identiquement nul [9]) est appelé «espace des erreurs» [10]); il est de dimension n — rg $\mathfrak{E} = n - r$.

Le complément orthogonal de V_0 (sous-espace V_+ de $\mathsf{V}^\star$ formé des vecteurs $\mathfrak{m}^\star$ pour lesquels $\mathfrak{m}^\star\,\mathfrak{l} = 0$ pour tout $\mathfrak{l}^\star \in \mathsf{V}_0$) est appelé « espace des estimatrices ». Une estimatrice est donc, par définition, une fonctionnelle linéaire des observations, orthogonale à toute fonctionnelle dont la moyenne est identiquement [9]) nulle. On remarquera que, $\mathsf{V}^\star$ étant somme directe de V_0 et V_+, à toute fonctionnelle linéaire des observations dont la moyenne n'est pas identiquement [9]) nulle correspond une et une seule fonctionnelle de V_+ ayant identiquement [9]) même moyenne qu'elle.

Enfin, l'image de $\mathfrak{E}$ (sous-espace B_+ de $\mathsf{B}^\star$ formé des combinaisons paramétriques $\mathfrak{b}^\star$ pour lesquelles il existe un vecteur $\mathfrak{l}^\star \in \mathsf{V}^\star$ tel que $\mathbf{E}\,\mathfrak{l}^\star\,\mathfrak{x} = \mathfrak{b}^\star\,\mathfrak{b}$) s'appelle « espace des combinaisons (paramétriques) estimables ». Nous noterons B_0 un complément quelconque de B_+.

On sait que la restriction de $\mathfrak{E}$ à V_+ est un isomorphisme de V_+ sur B_+; on peut donc énoncer que

toute combinaison estimable est la moyenne d'une et une seule estimatrice, et réciproquement.

1, 2. *Estimateurs privilégiés.*

1, 21. Si l'on a, pour $\mathfrak{l}^\star \in \mathsf{V}^\star$, $\mathbf{E}\,\mathfrak{l}^\star\,\mathfrak{x} = \mathfrak{f}^\star\,\mathfrak{b}$, $\mathfrak{f}^\star\,\mathfrak{b}$ est évidemment une combinaison estimable, et $\mathfrak{l}^\star\,\mathfrak{x}$ en est un estimateur fidèle (au sens de la théorie statistique de l'estimation); si $\mathfrak{m}^\star \in \mathsf{V}_0$, $(\mathfrak{l}^\star + \mathfrak{m}^\star)\,\mathfrak{x}$ est aussi un estimateur fidèle de $\mathfrak{f}^\star\,\mathfrak{b}$; pour distinguer, parmi tous ces estimateurs fidèles de $\mathfrak{f}^\star\,\mathfrak{b}$, l'unique estimatrice, celle-ci est dite « estimateur privilégié de $\mathfrak{f}^\star\,\mathfrak{b}$ », et désignée par $\mathfrak{l}_f^\star\,\mathfrak{x}$ (donc, par définition, $\mathbf{E}\,\mathfrak{l}_f^\star\,\mathfrak{x} = \mathfrak{f}^\star\,\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{l}_f^\star \in \mathsf{V}_+$).

1, 22. Théorème. *Parmi tous les estimateurs fidèles de la combinaison estimable* $\mathfrak{f}^\star \mathfrak{b}$, *l'estimateur privilégié a la variance minimum.*

Soit en effet $\mathfrak{m}^\star$ tel que $\mathbf{E}\, \mathfrak{m}^\star \mathfrak{x} = \mathfrak{f}^\star \mathfrak{b}$. On a, en posant $\tilde{\mathfrak{x}} = \mathfrak{x} - \mathbf{E}\, \mathfrak{x}$,

$$\begin{aligned} \operatorname{var} \mathfrak{m}^\star \mathfrak{x} &= \mathbf{E}\,[\mathfrak{m}^\star \mathfrak{x} - \mathbf{E}\, \mathfrak{m}^\star \mathfrak{x}]\,[\mathfrak{m}^\star \mathfrak{x} - \mathbf{E}\, \mathfrak{m}^\star \mathfrak{x}] \\ &= \mathbf{E}\,(\mathfrak{m}^\star \tilde{\mathfrak{x}})\,(\tilde{\mathfrak{x}}^\star \mathfrak{m})^\star = \mathfrak{m}^\star\,(\mathbf{E}\,\tilde{\mathfrak{x}}\,\tilde{\mathfrak{x}}^\star)\,\mathfrak{m}\,. \end{aligned} \tag{5}$$

La définition des propriétés distributionnelles de $\mathfrak{x}$ faisant intervenir la base $\mathfrak{P}$, introduisons cette base pour un calcul explicite:

$$\mathbf{E}\,\tilde{\mathfrak{x}}\,\tilde{\mathfrak{x}}^\star = \mathbf{E}\,\tilde{\mathfrak{x}}_P\,(\tilde{\mathfrak{x}}_P)^{\mathrm{T}} = \mathbf{E} \left\| \begin{matrix} \tilde{\mathbf{x}}_1^2 & \tilde{\mathbf{x}}_1\,\tilde{\mathbf{x}}_2 \ldots & \tilde{\mathbf{x}}_1\,\tilde{\mathbf{x}}_n \\ \vdots & & \\ \tilde{\mathbf{x}}_n\,\tilde{\mathbf{x}}_1 \ldots & & \tilde{\mathbf{x}}_n^2 \end{matrix} \right\|$$

$$= \mathfrak{J}_n\,\sigma^2$$

d'où

$$\operatorname{var} \mathfrak{m}^\star \mathfrak{x} = (\mathfrak{m}^\star \mathfrak{m})\,\sigma^2\,.$$

Soit alors

$$\mathfrak{m}^\star = \mathfrak{l}_f^\star + \mathfrak{m}_0^\star\,,$$

de sorte que

$$\mathfrak{l}_f^\star\,\mathfrak{m}_0 = \mathfrak{m}_0^\star\,\mathfrak{l}_f = 0\,;$$

on a

$$\operatorname{var} \mathfrak{m}^\star \mathfrak{x} = (\mathfrak{l}_f^\star\,\mathfrak{l}_f)\,\sigma^2 + (\mathfrak{m}_0^\star\,\mathfrak{m}_0)\,\sigma^2 \geqslant (\mathfrak{l}_f^\star\,\mathfrak{l}_f)\,\sigma^2 = \operatorname{var} \mathfrak{l}_f^\star\,\mathfrak{x},$$

l'inégalité étant d'ailleurs stricte si $\mathfrak{m}_0^\star \neq 0$.

1, 3. *Exécution des calculs.*

1, 31. Pour l'exécution effective des calculs, il importe d'introduire une base dans chacun des espaces considérés; dans ce paragraphe, V et $\mathsf{V}^\star$ sont rapportés aux bases $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{P}^\star$, B et $\mathsf{B}^\star$ sont rapportés à des bases déterminées $\mathfrak{H}$ et $\mathfrak{H}^\star$.

1, 32. Pour que $\mathfrak{l}^\star \in \mathsf{V}_0$, il est nécessaire et suffisant que $\mathfrak{l}^\star \mathfrak{A} = 0$; donc

l'espace des erreurs est engendré par ceux des vecteurs de $\mathsf{V}^\star$ *qui sont orthogonaux aux colonnes de la matrice* $\mathfrak{A}$ *(plus explicitement:* $\mathfrak{A}_{P,H}$*).*