

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 6 (1960)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** LES MODÈLES LINÉAIRES EN ANALYSE STATISTIQUE  
**Autor:** Breny, H.  
**Kapitel:** 0. Préliminaires.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-36336>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 10.07.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# LES MODÈLES LINÉAIRES EN ANALYSE STATISTIQUE

par H. BRENY <sup>1)</sup>

## 0. PRÉLIMINAIRES.

### 0, 1. *Introduction.*

La présente note a pour but d'exposer, d'une manière rigoureusement déductive, l'état actuel (bien proche, semble-t-il, de la perfection) de la théorie statistique des modèles linéaires (avec « erreurs » indépendantes, normales, et homoscédastiques), en insistant particulièrement, d'une part, sur la définition intrinsèque des « sommes de carrés » et, d'autre part, sur l'interprétation des sommes de carrés attachées à des groupes non orthogonaux. L'exposé utilise les notions élémentaires courantes d'algèbre linéaire (cfr. [I]), avec des notations précisées ci-dessous.

### 0, 2. *Notations.*

0, 21. Dans une question d'algèbre linéaire, il est, en général, essentiel d'utiliser un système de notations qui fasse nettement apparaître la distinction entre un vecteur (élément d'un espace vectoriel) et la représentation de ce vecteur par rapport à une base déterminée; il est clair, d'autre part, qu'un tel système doit, pour être complet, multiplier les signes diacritiques ( $b$  est un vecteur,  $b_p$  sa représentation par rapport à la base  $\mathfrak{B}$ , etc.). Or si, dans un contexte donné, la base à laquelle on se réfère est définie sans ambiguïté, il n'y a, somme toute, pas d'inconvénient à omettre ces signes et à utiliser, pour la représentation d'un vecteur par rapport à *cette* base, le même symbole que pour le vecteur lui-même.

---

<sup>1)</sup> L'auteur est « Associé » du Fonds national de la Recherche scientifique (Belgique).  
Le texte des notes et les références bibliographiques se trouvent en fin d'article.

0, 22. D'une manière précise, soit  $V$  un espace vectoriel réel, euclidien, à  $n$  dimensions,  $x, y, z, \dots$  des vecteurs de  $V$ ,  $\langle x, y \rangle$  le produit scalaire de  $x$  et  $y$ ; soit  $V^*$  l'espace dual de  $V$  (ensemble des fonctionnelles linéaires définies sur  $V$ ),  $x^*$  le dual de  $x$  (c'est-à-dire l'élément de  $V^*$  défini par

$$x^* : y \in V \rightarrow \langle x, y \rangle).$$

S'il résulte clairement du contexte que  $V$  est rapporté à une base  $\mathfrak{B}$  bien déterminée, que  $V^*$  est rapporté à la base duale  $\mathfrak{B}^*$ , et que ces bases sont orthonormales, la notation  $x$  désignera, dans ce contexte, non seulement le vecteur  $x$  de  $V$  mais aussi le  $n$ -uple de ses composantes par rapport à  $\mathfrak{B}$ ,  $n$ -uple écrit d'ailleurs sous forme de colonne <sup>1)</sup>; en outre,  $e_i$  désigne le  $i$ -ème vecteur de  $\mathfrak{B}$ , de sorte que

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} \langle x, e_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle x, e_n \rangle \end{bmatrix}.$$

De même, et toujours en supposant que le contexte empêche toute ambiguïté,  $x^*$  désigne non seulement le dual du vecteur  $x$  mais aussi le  $n$ -uple de ses composantes par rapport à  $\mathfrak{B}^*$ ,  $n$ -uple écrit d'ailleurs sous forme de ligne <sup>2)</sup>. Cette ambivalence des notations, combinée à l'usage du signe  $^*$  pour désigner à la fois le passage d'un vecteur à son dual et le passage d'une matrice à sa transposée <sup>3)</sup> permet d'appliquer sans peine les règles usuelles du calcul matriciel, et d'écrire, par exemple

$$\langle x, y \rangle = x^* y = y^* x$$

tant pour les vecteurs que pour leurs représentations.

De même, si  $\mathfrak{A}$  est une application linéaire de  $V$  dans un espace vectoriel  $U$ , et si les bases auxquelles sont rapportés ces espaces satisfont aux trois conditions énoncées ci-dessus, la notation  $\mathfrak{A}$  sera aussi utilisée pour la matrice qui représente l'application  $\mathfrak{A}$  par rapport à ces bases <sup>4)</sup>.

0, 23. La définition usuelle du produit de deux matrices introduit une multiplication lignes par colonnes; cette définition est évidemment nécessaire aux applications les plus courantes des

notations matricielles, et il n'est nullement question de la modifier. Toutefois, en ce qui concerne les calculs numériques, cette disposition n'est guère heureuse; on est ainsi conduit à introduire une multiplication lignes par lignes, notée  $\times_0$ , et une multiplication colonnes par colonnes, notée  $\times^0$ , et à utiliser les relations

$$\mathfrak{X}\mathfrak{Y} = \mathfrak{X} \times_0 \mathfrak{Y}^T = \mathfrak{X}^T \times^0 \mathfrak{Y}.$$

0, 24. Considérons une variable aléatoire, c'est-à-dire une application mesurable d'une catégorie d'épreuve <sup>5)</sup> (espace probabilisé) dans l'ensemble des nombres réels; considérons d'autre part la valeur attachée par cette application à un élément déterminé (ou censé tel) de la catégorie d'épreuve (le plus souvent, une « valeur observée » — ou « réalisation » — de la variable aléatoire). Il importe de pouvoir distinguer nettement ces deux êtres mathématiques; c'est pourquoi nous désignerons la variable aléatoire par un symbole en caractère gras, et une valeur observée de cette variable par le même symbole en caractères ordinaires.

Cette convention s'étend immédiatement aux éléments aléatoires plus généraux, tels que vecteurs ou matrices; ainsi,  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathfrak{A}$  représentent respectivement une variable, un vecteur, et une matrice aléatoires,  $x$ ,  $b$ ,  $\mathfrak{A}$ , représentent des valeurs observées de ces mêmes éléments aléatoires.

Il sera commode, lorsque nous considérerons une matrice aléatoire,  $\mathfrak{A}$ , de noter  $\mathbf{E} \mathfrak{A}$  la matrice dont l'élément  $(i, j)$  est la valeur moyenne de l'élément  $(i, j)$  de  $\mathfrak{A}$ :

$$a_{i,j} = e_i^* \mathfrak{A} e_j, \quad \mathbf{E} \mathfrak{A} = \sum_i \sum_j (\mathbf{E} a_{i,j}) e_i e_j^*.$$

Cette définition, appliquée à la représentation par une matrice  $1 \times n$  ou  $n \times 1$  d'un vecteur aléatoire, est en parfait accord avec la définition directe de la valeur moyenne d'un vecteur aléatoire considéré comme application mesurable d'une catégorie d'épreuve dans un espace vectoriel, pour autant que la représentation se fasse par rapport à une base certaine de cet espace, ce qui, pour nous, sera toujours le cas. Soit donc  $\mathbf{b}$  un vecteur aléatoire,  $\mathbf{b}_P$  la matrice qui le représente par rapport à la base  $\mathfrak{P}$ , de sorte que

$$\mathbf{E} \mathbf{b}_P = (\mathbf{E} \mathbf{b})_P;$$

nous poserons

$$\mathbf{C} \mathbf{b}_P = \mathbf{E}[\mathbf{b}_P - \mathbf{E} \mathbf{b}_P][\mathbf{b}_P - \mathbf{E} \mathbf{b}_P]^T .$$

$\mathbf{C} \mathbf{b}_P$  est une matrice carrée, symétrique; elle est appelée «matrice des covariances de  $\mathbf{b}_P$ » <sup>6)</sup>.

### 0, 3. Distributions multinormales.

0, 31. Rappelons que, si  $\mathbf{b}$  est un vecteur aléatoire multinormal, non dégénéré, de dimension  $n$ , si  $\mathbf{b}_P$  est la matrice  $n \times 1$ , de composantes  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ , qui le représente par rapport à une base certaine  $\mathfrak{B}$ , et si l'on pose

$$\mathbf{E} \mathbf{b}_P = \mathbf{m}_P, \quad \mathbf{C} \mathbf{b}_P = \mathfrak{S}_P ,$$

on a  $\text{rg } \mathfrak{S}_P = n$  et

$$\Pr [\mathbf{b}_i \leq u_i, i = 1, \dots, n] =$$

$$= (2\pi)^{-n/2} |\mathfrak{S}|^{-1/2} \int_{-\infty}^{u_1} \dots \int_{-\infty}^{u_n} \exp \left[ -\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{m}_P)^T \mathfrak{S}_P^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{m}_P) \right] d\mathbf{x} .$$

0, 32. Par ailleurs, si  $\mathbf{b}$  est le vecteur décrit ci-dessus, et si  $\mathbf{a}$  est un vecteur aléatoire lié à  $\mathbf{b}$  par une transformation linéaire régulière et certaine:

$$\mathbf{a} = \mathfrak{A} \mathbf{b} \quad (\text{rg } \mathfrak{A} = n) ,$$

$\mathbf{a}$  est aussi un vecteur aléatoire multinormal non dégénéré, de dimension  $n$ , et on a

$$\mathbf{E} \mathbf{a}_P = \mathfrak{A}_P \mathbf{E} \mathbf{b}_P, \quad \mathbf{C} \mathbf{a}_P = \mathfrak{A}_P (\mathbf{C} \mathbf{b}_P) \mathfrak{A}_P^T .$$

0, 33. Rappelons encore que, si  $\mathbf{b}$  est comme ci-dessus, les composantes  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$  de  $\mathbf{b}_P$  sont des variables aléatoires normales; celles-ci sont indépendantes si, et seulement si,  $\mathbf{C} \mathbf{b}_P$  est une matrice diagonale [ou, ce qui revient au même, si  $\text{cov}(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j) = 0, i \neq j$  <sup>7)</sup>]. La réalisation de cette condition, pour un  $\mathbf{b}$  donné, dépend essentiellement du choix de  $\mathfrak{B}$ . En fait, il est toujours possible de rapporter un vecteur multinormal à une base (certaine) telle que ses composantes soient des aléatoires indépendantes.

0, 34. Rappelons enfin que, si l'on nomme « gaussienne » toute aléatoire normale de moyenne nulle et de variance égale à 1, on a les énoncés suivants (cfr. [III], chap. 18):

- a) la somme des carrés de  $p$  aléatoires gaussiennes indépendantes est une aléatoire  $\chi^2$  à  $p$  degrés de liberté (en abrégé,  $\chi_p^2$ );
- b) si  $\mathbf{x}$  est une aléatoire gaussienne et  $\mathbf{u}$  une aléatoire  $\chi_p^2$  indépendante de  $\mathbf{x}$ , le quotient  $\mathbf{x}/\sqrt{(\mathbf{u}/p)}$  est une aléatoire de Student à  $p$  degrés de liberté (en abrégé,  $t_p$ );
- c) si  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  sont des aléatoires  $\chi^2$ , respectivement à  $m$  et  $n$  degrés de liberté, indépendantes, le quotient  $(\mathbf{u}/m):(\mathbf{v}/n)$  est une aléatoire  $\mathbf{F}$  de Snedecor à  $(m, n)$  degrés de liberté (en abrégé,  $\mathbf{F}_{m,n}$ ); il est souvent plus commode d'utiliser alors le fait que  $\mathbf{v}/(\mathbf{u} + \mathbf{v})$  est une aléatoire  $\beta_{p,q}$  avec  $p = n/2$ ,  $q = m/2$ , et de se référer aux tables de la distribution  $\beta$  (en général, en effet,  $n \geq m$ , donc  $p \geq q$ , comme dans les tables de Pearson [IV]); on notera que les grandes valeurs de  $\mathbf{F}$  correspondent aux petites valeurs de  $\beta$ .

## 1. MODÈLES LINÉAIRES. ESTIMATEURS.

### 1, 1. Définitions.

1, 11. Considérons une expérience aléatoire dont le résultat est un  $n$ -uplet ordonné de nombres réels, toutes les valeurs a priori possibles, de  $-\infty$  à  $+\infty$ , étant en effet à prendre en considération. Structurons l'ensemble des observations possibles en un espace vectoriel euclidien sur le corps des réels en postulant que, si  $\alpha = (a_1, \dots, a_n)$  et  $\beta = (b_1, \dots, b_n)$  sont deux observations, on a

pour la somme:

$$\alpha + \beta = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n), \quad (1)$$

pour le produit par un scalaire:

$$p \alpha = (p a_1, \dots, p a_n), \quad (2)$$

pour le produit scalaire:

$$\langle \alpha, \beta \rangle = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n. \quad (3)$$