

# ZUR DEFINITION DES KRÜMMUNGSRADIUS KONVEXER KURVEN

Autor(en): **Groemer, Helmut**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **6 (1960)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.04.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-36345>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# ZUR DEFINITION DES KRÜMMUNGSRADIUS KONVEXER KURVEN

von Helmut GROEMER in Corvallis, Ore., U.S.A.

(Reçu le 5 janvier 1961)

Es liege eine ebene konvexe Kurve, das heisst der Rand  $C$  eines konvexen Bereiches  $C^0$  vor. Ist  $P$  ein Punkt von  $C$ , so gibt es mehrere Möglichkeiten den Krümmungsradius von  $C$  im Punkte  $P$  zu erklären. Eine der bekanntesten Definitionen ist die folgende (siehe dazu B. JESSEN [1]).

*Definition 1:* Ausser dem festen Punkt  $P$  werde auf  $C$  noch ein Punkt  $X$  gewählt.  $R(P, X)$  bezeichne den Radius eines Kreises, der durch  $P$  und  $X$  geht und  $C$  in  $P$  berührt, das heisst  $C$  und der Kreis haben in  $P$  eine gemeinsame Stützgerade. Existiert der Grenzwert

$$(1) \quad R = \lim_{X \rightarrow P} R(P, X) ,$$

so heisse  $R$  der Krümmungsradius von  $C$  im Punkte  $P$ . (Falls  $C$  im Punkte  $P$  mehrere Stützgeraden hat, ist  $R(P, X)$  nicht eindeutig definiert. Dies ist jedoch ohne Bedeutung, da sich bei jeder Wahl  $R = 0$  ergibt.)

Die Werte  $R = 0$  und  $R = \infty$  seien stets zulässig. Im folgenden soll in zwei verschiedenen Formulierungen auf eine weitere einfache Möglichkeit,  $R$  zu definieren, hingewiesen werden. Es wird sich herausstellen, dass das durch die neue Definition gelieferte  $R$  mit (1) übereinstimmt. Ist  $P$  ein Punkt von  $C$  und  $K$  ein durch  $P$  gehender Kreis, so soll zunächst folgende Ausdrucksweise eingeführt werden:  $K$  heisse bei  $P$  innerhalb  $C$  liegend, wenn es eine Umgebung  $U$  von  $P$  gibt, so dass  $K \cap U \subset C^0$  ist.  $K$  heisse bei  $P$  ausserhalb  $C$  liegend, wenn es eine Umgebung  $U$  von  $P$  gibt, so dass  $K \cap U$  mit  $C^0 - C$  keine Punkte gemeinsam hat. Die entarteten Kreise vom Radius 0 oder  $\infty$  sollen nirgends ausgeschlossen sein.

Nun kann die folgende axiomatische Definition des Krümmungsradius gegeben werden.

*Definition 2:* Ein Zahl  $R$  heisse der Krümmungsradius von  $C$  im Punkte  $P$ , wenn es zu jedem  $R'$  mit  $R' < R$  einen Kreis vom Radius  $R'$  gibt, der bei  $P$  innerhalb  $C$  liegt, und zu jedem  $R''$  mit  $R'' > R$  einen Kreis vom Radius  $R''$  gibt, der bei  $P$  ausserhalb  $C$  liegt.

Eine konstruktive Fassung der Definition 2 ist die

*Definition 3:* Es sei  $\bar{R}$  die untere Grenze der Radien aller Kreise, die bei  $P$  ausserhalb  $C$  liegen, und  $\underline{R}$  die obere Grenze der Radien aller Kreise die bei  $P$  innerhalb  $C$  liegen. Gilt

$$(2) \quad \bar{R} = \underline{R} ,$$

so heisse dieser Wert der Krümmungsradius  $R$  von  $C$  im Punkte  $P$ .

Ist  $\bar{R} \neq \underline{R}$ , so könnte man  $\bar{R}$  den äusseren und  $\underline{R}$  den inneren Krümmungsradius von  $C$  nennen.  $\bar{R}$  und  $\underline{R}$  haben viele Eigenschaften, die  $R$  hat und existieren immer. Die Definitionen 2 und 3 kann man auch so formulieren, dass sie für beliebige orientierte ebene Kurven einen Sinn haben. Man braucht nur die Begriffe „bei  $P$  innerhalb  $C$ “ und „bei  $P$  ausserhalb  $C$ “ in naheliegender Weise durch „bei  $P$  links von  $C$ “ und „bei  $P$  rechts von  $C$ “ ersetzen.

Es soll nun gezeigt werden, dass die Definitionen 1, 2, 3 untereinander äquivalent sind.

*Äquivalenz der Definitionen 1 und 3:* Wie schon bemerkt, kann man voraussetzen, dass es in  $P$  genau eine Stützgerade von  $C$  gibt. Angenommen (2) sei richtig. Ist  $\varepsilon > 0$  vorgegeben, so gibt es dann zwei durch  $P$  gehende Kreise  $\bar{K}_\varepsilon, \underline{K}_\varepsilon$  mit den Radien  $R + \varepsilon, R - \varepsilon$ , derart dass für eine gewisse Umgebung  $U$  von  $P$  der Teilbogen  $C_\varepsilon = C \cap U$  von  $C$  zwischen  $\bar{K}$  und  $\underline{K}$  liegt. ( $R$  bedeutet natürlich das durch (2) gegebene  $R$ .) Ist  $X$  ein beliebiger Punkt aus  $C_\varepsilon$ , so muss daher der Kreis, der durch  $P$  und  $X$  geht und  $C$  im Punkte  $P$  berührt, zwischen  $\bar{K}$  und  $\underline{K}$  liegen. Somit gilt für hinreichend nahe bei  $P$  liegendes  $X$

$$R - \varepsilon \leq R(P, X) \leq R + \varepsilon .$$

Das bedeutet aber, dass (1) existiert und dass die durch Definition 1 und 3 gegebenen  $R$  in diesem Fall übereinstimmen.

Nun werde angenommen, dass (1) existiere. Es sei  $K$  der Kreis mit dem durch (1) gegebenen Radius  $R$ , der  $C$  in  $P$  berührt. Es soll zunächst gezeigt werden: Berührt ein Kreis  $\bar{K}$  vom Radius  $R + \varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ )  $C$  im Punkte  $P$ , so liegt  $\bar{K}$  bei  $P$  ausserhalb  $C$ . Wäre dies nämlich nicht der Fall, so gäbe es eine Folge von Punkten  $P_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) mit  $P_i \in C$ ,  $\lim_{i \rightarrow \infty} P_i = P$  und  $P_i$  ausserhalb  $\bar{K}$ . Für die Radien  $R(P, P_i)$  gälte daher

$$R = \lim_{X \rightarrow P} R(P, X) \geq \lim_{i \rightarrow \infty} R(P, P_i) \geq R + \varepsilon ,$$

was unmöglich ist. Genau so sieht man, dass die analog definierten Kreise  $K_\varepsilon$  vom Radius  $R - \varepsilon$  bei  $P$  innerhalb  $C$  liegen. Zusammen mit der trivialen Ungleichung  $\underline{R} \leq \bar{R}$  erhält man demnach für jedes positive  $\varepsilon$

$$R - \varepsilon \leq \underline{R} \leq \bar{R} \leq R + \varepsilon ,$$

also  $R = \underline{R} = \bar{R}$ .

*Äquivalenz der Definitionen 2 und 3:* Dass das durch (2) oder (1) gegebene  $R$  die in Definition 2 genannte Eigenschaft hat, wurde soeben beim Beweis, dass (2) aus (1) folgt, dargelegt. Liegt umgekehrt ein durch Definition 2 erklärtes  $R$  vor, so ist offenbar sowohl  $R < \bar{R}$  wie auch  $R > \underline{R}$  unmöglich. Also gilt

$$\bar{R} \leq R \leq \underline{R} ,$$

woraus wegen  $\underline{R} \leq \bar{R}$  folgt, dass  $R = \bar{R} = \underline{R}$  ist.

#### LITERATUR

- [1.] B. JESSEN, Om konvekse Kurvers Krumning. *Mat. Tidsskr. B.*, 50-62 (1929).