II. La cinématique du point.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **6 (1960)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.09.2024**

II. La cinématique du point.

4. *Interprétation.*

Les formules (3. 4) des transformations propres spéciales de Lorentz peuvent être interprétées en termes classiques d'espace et de temps.

Supposons que le point $M \in V_4$ ait une projection d'espace liée au repère $(\vec{e}'_\alpha)$, c'est-à-dire telle que les x'_i restent constants. On aura en différentiant la seconde équation de (3. 4a)

$$dx_1 - \beta dx_0 = 0 \qquad \text{soit} \qquad \beta = \frac{dx_1}{dx_0}$$

En revenant à la variable t $(x_0 = ct)$, on voit que $\beta = \frac{v}{c}$, v désigne la vitesse d'un point lié au repère de Galilée $(0', \vec{e}'_i)$ dans son mouvement par rapport au repère de Galilée $(0, \vec{e}_i)$. Comme $x'_2 = x_2$, $x'_3 = x_3$, $\vec{e}'_2 = \vec{e}_2$ et $\vec{e}'_3 = \vec{e}_3$. Par suite le second repère de Galilée a ses axes $O'y'$ et $O'z'$ de même direction et de même sens que les axes Oy et Oz du premier repère de Galilée, l'axe $O'x'$ étant orienté dans le sens de Ox glisse sur Ox avec la vitesse constante v.

Pour β petit, on obtient en première approximation les formules des transformations de Galilée

$$\begin{aligned} t' &= t \\ x' &= x - vt \\ y' &= y \\ z' &= z\,. \end{aligned}$$

Des formules de la transformation spéciale de Lorentz (3. 4), on peut déduire une formule intrinsèque en langage classique. Il est clair que

$$\vec{e}_1 = \vec{e}'_1 = \frac{\vec{\beta}}{\beta}$$

β étant le vecteur vitesse réduite. Soit $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ le vecteur d'espace de composantes x_i $(i = 1, 2, 3)$ dans le premier repère de Galilée et $\vec{r}' = \overrightarrow{O'M}$ le vecteur homologue de composantes x_i' dans le second repère de Galilée. Nous avons

$$x_1' = \vec{r}' \cdot \vec{e}_1 = \frac{\vec{r}' \cdot \vec{\beta}}{\beta}$$

Il vient de la première équation (3. 4b)

$$x_0 = \frac{x_0' + \vec{r}' \cdot \vec{\beta}}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{4. 1}$$

puis des trois équations suivantes, en formant la combinaison $\Sigma x_i \vec{e}_i = \vec{r}$:

$$\vec{r} = \vec{r}' + \left(\frac{\beta x_0' + x_1'}{\sqrt{1-\beta^2}} - x_1'\right) \vec{e}^1$$

soit

$$\vec{r} = \vec{r}' + \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right) \frac{\vec{r}' \cdot \vec{\beta}}{\beta^2} \vec{\beta} + \frac{x_0'}{\sqrt{1-\beta^2}} \vec{\beta} . \tag{4. 2}$$

On établit de même les formules inverses:

$$x_0' = \frac{x_0 - \vec{\beta} \cdot \vec{r}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \tag{4.3}$$

$$\vec{r}' = \vec{r} + \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1\right) \frac{\vec{r} \cdot \vec{\beta}}{\beta^2} \vec{\beta} - \frac{x_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \vec{\beta} \tag{4.4}$$

Les formules (4. 1) et (4. 2) sous forme vectorielle ne dépendent pas des rotations spatiales portant sur l'un ou l'autre repère de Galilée. Elles constituent donc l'interprétation en termes classiques de la transformation propre la plus générale de Lorentz. On notera cependant que cette interprétation est faite dans la variété numérique V_4 non organisée, l'espace seul est l'espace euclidien, le temps est un paramètre scalaire.

Les formules de transformation propre de Lorentz permettent de calculer l'espace et le temps définis dans un repère de Galilée par le principe de constance de vitesse, lorsqu'on connaît son mouvement par rapport à un autre repère de Galilée et l'espace et le temps définis dans celui-ci.

5. *Cinématique relativiste.*

Appelons $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\beta}'$ respectivement la vitesse absolue, la vitesse d'entraînement et la vitesse relative d'un point

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{r}}{dx_0} \qquad \vec{\beta} = \frac{d\vec{0}}{dx_0} \qquad \vec{\beta}' = \frac{d\vec{r}'}{dx_0'} .$$

Par dérivation de (4. 2) par rapport à x_0, il vient

$$\frac{d\vec{r}}{dx_0} = \frac{dx_0'}{dx_0}\left\{\frac{d\vec{r}'}{dx_0'} + \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)\left(\vec{\beta}\cdot\frac{d\vec{r}'}{dx_0'}\right)\frac{\vec{\beta}}{\beta^2} + \frac{\vec{\beta}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right\}$$

Or (4. 1) donne

$$\frac{dx_0'}{dx_0} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1+\vec{\beta}\cdot\vec{\beta}'}$$

Il vient ainsi

$$(5.\ 1) \quad \vec{\alpha} = \frac{1}{1+\vec{\beta}\cdot\vec{\beta}'}\left\{\sqrt{1-\beta^2}\,\vec{\beta}' + (1-\sqrt{1-\beta^2})\,\frac{\vec{\beta}\cdot\vec{\beta}'}{\beta^2}\,\vec{\beta} + \vec{\beta}\right\}$$

Cette relation montre que $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ et $\vec{\beta}'$ sont coplanaires. On peut la transformer de façon à mettre en évidence au second membre un vecteur parallèle à $\vec{\beta}$ et un autre orthogonal à $\vec{\beta}$:

$$(5.1') \quad \vec{\alpha} = \frac{1}{1+\vec{\beta}\cdot\vec{\beta}'}\left\{\left(1+\frac{\vec{\beta}\cdot\vec{\beta}'}{\beta^2}\right)\vec{\beta} + \sqrt{1-\beta^2}\left[\vec{\beta}' - \left(\frac{\vec{\beta}\cdot\vec{\beta}'}{\beta^2}\right)\vec{\beta}\right]\right\}$$

Si β est petit, on a en première approximation

$$\vec{\alpha} = \vec{\beta} + \vec{\beta}' .$$

C'est la formule classique de la composition des vitesses en mécanique newtonienne. En théorie de la relativité, la relation entre $\vec{\alpha}$ $\vec{\beta}$, $\vec{\beta}'$ qui donne la loi relativiste de composition des vitesses est plus compliquée. Elle entraîne plusieurs conséquences:

1. Le carré du vecteur vitesse résultant a pour valeur

$$\alpha^2 = 1 - \frac{(1-\beta^2)(1-\beta'^2)}{(1+\vec{\beta}\cdot\vec{\beta}')^2}$$

Pour β et β' inférieurs à 1, $\alpha^2 < 1$. Il est donc impossible par composition de deux vitesses inférieures à celle de la lumière, de dépasser celle-ci.

2. Pour $\beta = 1$ ou $\beta' = 1$, $\alpha^2 = 1$. On voit que quelle que soit la vitesse d'entraînement $\vec{\beta}$, on obtient $\alpha^2 = 1$, résultat qui est bien en accord avec le principe de constance de la vitesse de la lumière.

3. Dans le cas où $\vec{\beta}$ et $\vec{\beta}'$ sont colinéaires, on a la relation algébrique

$$\alpha = \frac{\beta + \beta'}{1 + \beta\beta'}$$

C'est la relation établie par EINSTEIN. On remarque que ce résultat correspond à la composition de deux rotations dans le plan hyperbolique. En effet

$$\alpha = Th\,(\varphi + \varphi') = \frac{Th\varphi + Th\varphi'}{1 + Th\varphi\, Th\varphi'} = \frac{\beta + \beta'}{1 + \beta\beta'}\,.$$

La loi relativiste de composition des vitesses donne une interprétation satisfaisante de la formule de FRESNEL relative à l'expérience de l'entraînement partiel de la lumière par un milieu réfringent en mouvement, comme elle rend compte parfaitement de l'échec de l'expérience de MICHELSON.

6. *Les vecteurs vitesse unitaire et accélération d'univers.*

Un point matériel M en mouvement décrit dans l'espace-temps V_4 une trajectoire d'univers C. Comme sa vitesse est inférieure à c, l'arc s de trajectoire est tel que $ds^2 > 0$. On dit que sa trajectoire est une courbe *orientée dans le temps*.

On appelle *vecteur vitesse unitaire* de M le vecteur de composantes contravariantes

$$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{ds} \tag{6. 1}$$

On appelle *vecteur accélération de M* le vecteur de composantes contravariantes

$$J^\alpha = \frac{du^\alpha}{ds}\,. \tag{6. 2}$$

On interprète immédiatement ces définitions en rapportant l'espace-temps V_4 à un repère lorentzien. On a

$$ds^2 = dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 = (1 - \beta^2)\, dx_0^2$$

soit

$$ds^2 = \sqrt{1-\beta^2}\, dx_0 = \sqrt{1-\beta^2}\, cdt\,.$$

Par suite

$$u^0 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad u^i = \frac{v^i}{c\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

v^i désignent les composantes du vecteur vitesse ordinaire dans le repère de Galilée correspondant. On interprète alors le vecteur accélération d'univers J^α. Pour β petit c'est-à-dire v petit devant c, on a en première approximation les définitions classiques.

III. La dynamique du point.

7. *Le principe de l'inertie.*

Supposons qu'un point matériel ait une accélération d'univers constamment nulle. De

$$\gamma^0 = \frac{d}{ds}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 0$$

on tire $\beta^2 =$ constant; puis de

$$\gamma^i = \frac{d}{ds}\frac{v^i}{c\sqrt{1-\beta^2}} = 0$$

on tire $v^i =$ const. Dans le repère de Galilée associé, le point M a un mouvement rectiligne uniforme. Cette propriété traduit le principe de l'inertie en mécanique classique d'après lequel un point matériel isolé a une accélération nulle c'est-à-dire un mouvement rectiligne uniforme. La réciproque est immédiate.

Or si $J^\alpha = 0$, le point M décrit une droite ou géodésique de l'espace-temps. On postule ainsi en relativité restreinte.