3. Le groupe de transformations de Lorentz.

L'espace et le temps sont relatifs à chaque repère lorentzien et diffèrent d'un repère à un autre. Leurs relations sont définies par les formules de transformations de Lorentz.

2. *Le déplacement d'une onde lumineuse est telle que* $ds^2 = 0$. Sa vitesse est donc invariante par changement de repère (c'est c).

Toute vitesse réelle est inférieure à celle de la lumière, donc telle que $ds^2 > 0$.

3. Le principe II entraîne que *toute loi mécanique ou électromagnétique s'exprime par une équation invariante par changement de repère* (ou indépendante du choix des coordonnées de V_4) et a fortiori invariante par les transformations du groupe de Lorentz. C'est ce qui conduit à l'expression tensorielle des grandeurs en relativité.

3. *Le groupe de transformations de Lorentz.*

Les transformations de Lorentz laissent invariante la forme quadratique fondamentale $dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2$. On démontre qu'à une translation près, ce sont des transformations linéaires de matrice $a = (a_{\lambda\alpha})$

$$x'_\lambda = \sum_\alpha a_{\lambda_\alpha} x_\alpha \qquad \text{ou} \qquad x' = ax$$

telles que

$${}^t x' \eta x' = {}^t(ax) \eta (ax) = {}^t x \, {}^t a \eta a x = {}^t x \eta x,$$

soit

$$ {}^t a \eta a = \eta, \tag{3. 1}$$

où $\eta = (\eta_{\alpha\beta})$ est la matrice d'éléments $\eta_{00} = +1$, $\eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = -1$, $\eta_{\alpha\beta} = 0$ si $\alpha \neq \beta$.

Ces transformations forment le groupe dit général de Lorentz. En fait on se limite à des transformations propres qui conservent l'orientation du temps et l'orientation de l'espace: elles sont telles que

$$a_{00} \geqq 1 \quad \text{et} \quad \det a = +1 \,. \tag{3. 2}$$

Elles forment le groupe propre de Lorentz sous-groupe du groupe général.

A toute transformation de coordonnées x_α correspond un changement de repère lorentzien qui leur est associé. On voit alors que par des rotations purement spatiales ($\vec{e}_0$ et $\vec{e}'_0$ restent fixes), on peut amener $\vec{e}_1$ et $\vec{e}'_1$ dans le 2-plan ($\vec{e}_0$, $\vec{e}'_0$), $\vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$ en $\vec{e}'_2$ et $\vec{e}'_3$. Autrement dit, toute transformation propre de Lorentz peut être réalisée comme produit de transformations spatiales pures (ne portant que sur les x_i) et d'une transformation dite *spéciale de Lorentz* de la forme

$$\begin{aligned} x'_0 &= a_{00}\,x_0 + a_{01}\,x_1 \\ x'_1 &= a_{10}\,x_0 + a_{11}\,x_1 \\ x'_2 &= x_2 \\ x'_3 &= x_3\,. \end{aligned}$$

En exprimant les conditions (3. 1) et (3. 2), on trouve

$$\text{(3. 3)} \qquad \begin{aligned} x'_0 &= x_0\,Ch\varphi - x_1\,Sh\varphi \\ x'_1 &= -x_0\,Sh\varphi + x_1\,Ch\varphi \\ x'_2 &= x_2 \\ x'_3 &= x_3 \end{aligned}$$

φ désignant un paramètre. Ces formules traduisent une rotation d'argument φ dans le plan hyperbolique (x_0, x_1). La transformation inverse de (3. 3) s'en déduit immédiatement. On peut encore introduire le nombre $\beta = Th\varphi$ $(-1 \leqslant \beta \leqslant +1)$ et écrire ces transformations sous la forme devenue classique:

$$\text{(3. 4)} \qquad \text{(a)} \quad \begin{aligned} x'_0 &= \frac{x_0 - \beta x_1}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ x'_1 &= \frac{-\beta x_0 + x_1}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ x'_2 &= x_2 \\ x'_3 &= x_3 \end{aligned} \qquad\qquad \text{(b)} \quad \begin{aligned} x_0 &= \frac{x'_0 + \beta x'_1}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ x_1 &= \frac{\beta x'_0 + x'_1}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ x_2 &= x'_2 \\ x_2 &= x'_2 \end{aligned}$$