

# DIVERGENCE DE LA SÉRIE HARMONIQUE D'APRÈS MENGOLI (1650)

Autor(en): **Karamata, J.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **5 (1959)**

Heft 2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-35478>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# DIVERGENCE DE LA SÉRIE HARMONIQUE D'APRÈS MENGOLI (1650)

par J. KARAMATA, Genève

(Reçu le 1<sup>er</sup> février 1957.)

On attribue souvent aux Bernoulli, Jean (1677-1748) et Jacques (1654-1705), les premières démonstrations de la divergence de la série harmonique <sup>1)</sup>

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

En réalité, Pietro Mengoli <sup>2)</sup> (1625-1686) en avait donné antérieurement une démonstration fort élégante, qui, transcrite en langage actuel, prend une forme très simple et parfaitement rigoureuse.

Mengoli établit d'abord que, dans toute progression harmonique, la moyenne arithmétique de trois termes consécutifs est supérieure au terme du milieu. Pour la série envisagée, cela équivaut à l'inégalité

$$\frac{1}{3} \left( \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right) > \frac{1}{n}, \quad n = 2, 3, 4, \dots$$

---

<sup>1)</sup> Les méthodes de Jean et de Jacques Bernoulli se trouvent exposées dans: MORITZ CANTOR, *Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik*, 2<sup>e</sup> édition, Leipzig (1901); t. III, pp. 93-95.

Voici quelques données historiques plus précises que je dois à M. J. E. HOFMANN. C'est Jean Bernoulli qui remarqua d'abord la divergence de la série harmonique, dont la démonstration se trouve dans: *Opera omnia*, Lausanne-Genève, 1742 (en réalité 1743), vol. IV, p. 8. L'ayant communiquée à Jacques Bernoulli, ce dernier en donna deux autres qui se trouvent dans: *Basileensis Opera*, Genève, 1744, vol. I, pp. 392-4: Première dissertation sur les séries (1689), proposition 16, et vol. I, pp. 529-30: Deuxième dissertation sur les séries, proposition 24. Traduction en allemand par Gerhard Kowalewski, Leipzig, 1903 (*Ostwalds Klassiker*, n° 71), pp. 17-19 et 34-35.

Les Bernoulli ne savaient rien sur Mengoli, par contre Leibniz connaissait sa démonstration (voir J. E. HOFMANN, *Entwicklungsgeschichte der Leibnizschen Mathematik*, München, 1949, p. 184). Dans sa lettre à Jean Bernoulli, Leibniz mentionne la divergence des séries harmoniques sans toutefois citer Mengoli (voir LEIBNIZ, *Mathematische Schriften* (F. Gerhardt), vol. III, Halle, 1855, p. 165: Brief an Jh. Bernoulli von 28.II (10.III) 1695).

<sup>2)</sup> *Novae quadraturae arithmeticae, sed De Additione Fractionum*, Bologne (1650). Voir G. ENESTRÖM, *Zur Geschichte der unendlichen Reihen um die Mitte des siebzehnten Jahrhunderts*; *Bibliotheca mathematica* (3), 12, pp. 135-148 (1911).

En désignant alors par  $k$ , le plus grand entier tel que

$$3k + 1 \leq n,$$

c'est-à-dire, en posant

$$k = \left[ \frac{n-1}{3} \right],$$

on aura, pour la somme  $H_n$  des  $n$  premiers termes de la série harmonique

$$\begin{aligned} H_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \geq \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{3k-1} + \frac{1}{3k} + \frac{1}{3k+1} > \\ &> 1 + 3 \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{3k} \right) = \\ &> 1 + \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k} \right); \end{aligned}$$

donc

$$H_n > 1 + H_k \quad \text{avec} \quad k = \left[ \frac{n-1}{3} \right].$$

Il en résulte que la suite  $H_n$  ne peut converger, car l'hypothèse

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H_n = H$$

aboutirait à la contradiction

$$H \geq 1 + H.$$

Pour en déduire que  $H_n \rightarrow \infty$ , il faut toutefois recourir au théorème fondamental, relatif aux suites monotones, d'après lequel: « toute suite non décroissante tend ou bien vers une limite finie ou bien vers l'infini », théorème qui se trouve également énoncé dans l'ouvrage cité de Mengoli (voir ENESTRÖM, *l. c.*<sup>3)</sup>, p. 145).

La simplicité de cette démonstration suggère les remarques suivantes.

En premier lieu<sup>4)</sup>, on peut l'abrégier, si, partant de l'inégalité évidente

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \right) > \frac{1}{n}, \quad n = 2, 3, \dots,$$

<sup>3)</sup> Voir page précédente.

<sup>4)</sup> Voir JOS. E. HOFMANN, Ueber Jakob Bernoullis Beiträge zur Infinitesimalmathematik. *Monographies de l'Enseignement mathématique*, n° 3, Genève, 1957, pp. 15-16 et 64-65, en particulier p. 65.

on envisage dans la série harmonique les groupes de deux termes consécutifs à partir du troisième. Ainsi, en posant

$$k = \left[ \frac{n}{2} \right],$$

on aura

$$\begin{aligned} H_n &\geq H_{2k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2k} > \\ &> 1 + \frac{1}{2} + 2 \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2k} \right) = \frac{1}{2} + H_k. \end{aligned}$$

Donc

$$H_n > \frac{1}{2} + H_k \quad \text{avec} \quad k = \left[ \frac{n}{2} \right],$$

d'où l'on tire la même conclusion que précédemment.

En second lieu cette même idée conduit à une démonstration très simple de la convergence de la série

$$\sum \frac{1}{n^s}, \quad \text{pour } s > 1.$$

En effet, de l'inégalité

$$\frac{1}{n^s} + \frac{1}{(n+1)^s} < \frac{2}{n^s}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

on déduit, pour la somme  $H_n(s)$  des  $n$  premiers termes de cette série,

$$\begin{aligned} H_n(s) &< H_{2n+1}(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots + \frac{1}{(2n)^s} + \frac{1}{(2n+1)^s} < \\ &< 1 + 2 \left( \frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \dots + \frac{1}{(2n)^s} \right) = \\ &< 1 + \frac{1}{2^{s-1}} H_n(s), \end{aligned}$$

d'où, puisque  $s > 1$ ,

$$H_n(s) < \frac{2^{s-1}}{2^{s-1} - 1}.$$

Aussi, la suite  $H_n(s)$  étant croissante et bornée, la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

converge pour tout  $s > 1$ .