1. Points où *f* admet un extremum.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **5 (1959)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.04.2024**

1. Points où f admet un extremum.

Soit

$$x = ..., x_1 x_2 ... x_n ... \tag{2}$$

un développement de x en numération binaire (il y en a deux quand x est un nombre binaire), et soit

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} 2^{-k} \varphi(2^k x) . \tag{3}$$

Minima relatifs.

Si $a = ..., a_1 a_2 ... a_n = p2^{-n}$ (p entier), on a $f_{n-1}(a) = f_n(a) = ... = f(a)$ et réciproquement. Pour m assez grand ($m \geqslant 2n$), f_m admet en a un minimum relatif; comme $f \geqslant f_m$ et $f(a) = f_m(a)$, f admet également en a un minimum relatif. Inversement, si $f(x)$ est le minimum de f sur un segment $[a, a'] = [p 2^{-n}, (p+1) 2^{-n}]$, n impair, les relations

$$f(x) \geqslant f_{n-1}(x) \ , \quad f(a) = f_{n-1}(a) \ , \quad f(a') = f_{n-1}(a')$$

jointes au fait que f_{n-1} est linéaire et non constant sur $[a, a']$, entraînent que $x = a$ ou $x = a'$.

Donc *l'ensemble des points où* f *admet un minimum relatif est l'ensemble des nombres binaires* p2^{-n}. C'est un ensemble dénombrable, dense sur la droite.

Maximum.

On a $f(x) = \sum_{0}^{\infty} 4^{-k} f_1(4^k x)$. Or $f_1(4^k x)$ est maximum, et égal à 1, si et seulement si $x_{2k+1} + x_{2k+2} = 1$ (pour au moins un développement de x sous la forme (2)).

Donc *l'ensemble des points où* f *atteint son maximum, égal à 4/3, est l'ensemble des* x, *de la forme* (2), *satisfaisant* $x_{2k+1} + x_{2k+2} = 1$ *pour* k = 0, 1, ... C'est un ensemble parfait totalement discontinu, de mesure nulle.

Maxima relatifs.

On a

$$f(x) = f_{2n-1}(x) + \sum_{k=n}^{\infty} 4^{-k} f_1(4^k x) . \qquad (4)$$

Pour que x soit un point où f admet un maximum relatif, il suffit donc que f_{2n-1} soit constant au voisinage de x, et que $f_1(4^k x) = 1$ pour $k \geqslant n$; la première condition équivaut à $x_1 + x_2 + \dots + x_{2n} = n$, la seconde, comme on l'a vu, à $x_{2k+1} + x_{2k+2} = 1$ $(k \geqslant n)$.

Inversement, soit x un point où f admet un maximum relatif, il admet un développement unique de la forme (2); je dis qu'il existe une infinité de valeurs de n pour lesquelles $x_1 + x_2 + \dots + x_{2n} = n$. Sinon, en effet, $f'_n(x) = 2(x_1 + x_2 + \dots + x_n) - n$ garde un signe constant pour n assez grand, soit, pour fixer les idées, le signe $+$; soit I_n le segment rectiligne du graphe de f_{n-1} qui se projette sur l'axe des x suivant le segment $[p2^{-n}, (p+1)\,2^{-n}]$ contenant x; pour n assez grand, I_{n+1} est à gauche de I_n, donc I_{n+j} est à gauche de I_n $(j \geqslant 1)$, donc le point $(x, f(x))$ est à gauche de I_n; comme I_n est une corde du graphe de f, $f(x)$ n'est pas un maximum relatif, contrairement à l'hypothèse. Il existe donc un n tel que $x_1 + x_2 + \dots + x_{2n} = n$, et tel que, sur l'intervalle contenant x où f_{2n-1} est constant, $f(x)$ soit le maximum de f. D'après (4), il s'ensuit que $f_1(4^k x) = 1$ pour $k \geqslant n$.

Ainsi, l'ensemble des points où f *admet un maximum relatif est l'ensemble des* x, *de la forme (2), satisfaisant les égalités* $x_1 + x_2 + \dots + x_{2k} = k$ *pour* k *assez grand.* C'est un F_σ, dense sur la droite, de mesure nulle.

2. Exemple d'une fonction continue sans dérivée, dont le module de continuité satisfait $\omega(h) \leqslant \chi(h)$, χ étant une fonction donnée.

Si $\varliminf_{h \to 0} h^{-1} \chi(h) < \infty$, l'inégalité $\omega(h) \leqslant \chi(h)$ entraîne que la fonction est lipschitzienne [2)], donc admet une dérivée presque

2) En vertu de l'inégalité $\omega(n\delta) \leqslant n\omega(\delta)$, valable pour tout $\delta > 0$ et tout entier naturel n.