

## 4. Les méthodes.

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **4 (1958)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.09.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Avant de poursuivre, indiquons que si on considère le problème du point de vue de la convergence simple (et non du point de vue d'une méthode de sommabilité), ce n'est pas parce que la convergence simple est plus importante, mais c'est parce que c'est le problème de la convergence simple qui soulève les questions les plus intéressantes dans la classification des ensembles entre ensembles U et ensembles M.

### 3. LES ENSEMBLES DU TYPE H ET LES RÉSULTATS DE RAJCHMAN.

Quelques années après le résultat de Menchoff, Rajchman a découvert toute une catégorie d'ensembles parfaits de mesure nulle qui sont des ensembles U.

Soit E un ensemble porté par le tore de longueur 1. S'il existe une suite d'entiers  $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$  tels que pour tout  $x \in E$  et pour tout  $k$  le point  $n_k x$  (réduit modulo 1) n'appartienne jamais à un certain intervalle J, l'ensemble est dit du type H. Ainsi l'ensemble classique de Cantor à rapport constant  $\xi = 1/3$  est du type H. Il suffit de prendre  $n_k = 3^k$ .

Rajchman a démontré que tout ensemble du type H (ces ensembles sont nécessairement de mesure nulle) est un ensemble U.

Nina Bary a démontré que l'union d'une infinité dénombrable d'ensembles U *fermés* est encore un ensemble U.

### 4. LES MÉTHODES.

D'après la théorie classique de Riemann, pour démontrer qu'un ensemble parfait P est un ensemble M, il suffit de construire une fonction  $F(x)$  non constante, mais constante dans chaque intervalle contigu à P et ayant des coefficients de Fourier qui soient  $o\left(\frac{1}{n}\right)$ . La série obtenue par dérivation formelle de la série de Fourier de  $f$  converge alors vers zéro dans tout intervalle contigu à P. On démontre aussi que l'existence d'une telle fonction  $f$  est nécessaire, si P est un ensemble M.

En particulier  $f$  peut être à variation bornée; dans ce cas

la série qui converge vers zéro hors de  $P$  est une série de Fourier-Stieltjes.

Donc, en particulier, pour montrer que  $P$  est un ensemble  $M$ , il suffit de construire une fonction continue non décroissante, constante dans chaque intervalle contigu à  $P$  (mais non partout) et dont les coefficients de Fourier-Stieltjes tendent vers zéro — c'est la méthode employée par Menchoff.

Il est plus compliqué de démontrer, en se servant des mêmes idées, qu'un ensemble parfait  $P$  est un ensemble  $U$ . Il faut évidemment montrer qu'il n'existe pas de fonction à variation bornée constante dans les intervalles contigus à  $P$  et à coefficients de Fourier-Stieltjes tendant vers zéro. Mais cela ne suffit pas: il faut encore montrer qu'il n'existe aucune fonction (à variation bornée ou non) constante dans chaque intervalle contigu à  $P$  et dont les coefficients de Fourier soient  $o\left(\frac{1}{n}\right)$ .

En fait, on ne s'est jamais, à notre connaissance, servi de cette méthode pour montrer qu'un ensemble  $E$  est un ensemble  $U$ . On l'a toujours fait en montrant que  $E$  appartient à une catégorie d'ensembles (par exemple  $H$ ) qui sont connus pour être des ensembles d'unicité.

##### 5. LES RÉSULTATS DE NINA BARY SUR LES ENSEMBLES CANTORIENS A RAPPORT CONSTANT RATIONNEL.

Les ensembles de Cantor à rapport constant  $\xi$  sont, quand  $\xi$  est l'inverse d'un entier (comme pour l'ensemble ternaire classique de Cantor) du type  $H$  et donc, d'après le théorème de Rajchman, des ensembles  $U$ . Il était naturel de se demander si ces ensembles peuvent être des ensembles  $M$  pour certaines valeurs de  $\xi$  et dans l'affirmative de déterminer les valeurs de  $\xi$  pour lesquelles l'ensemble est un ensemble d'unicité ou de multiplicité.

Nina Bary a résolu ce problème pour le cas de  $\xi$  rationnel, en obtenant le résultat remarquable suivant. Soit  $\xi = \frac{p}{q}$ , fraction irréductible; la condition nécessaire et suffisante pour que l'ensemble soit  $U$  est que  $p = 1$ ; dans tous les autres cas, l'ensemble est  $M$ .