1. Notions préliminaires.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **4 (1958)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **22.09.2024**

RECHERCHES RÉCENTES SUR L'UNICITÉ DU DÉVELOPPEMENT TRIGONOMÉTRIQUE *)

par Raphaël SALEM, Paris

(Reçu le 8 octobre 1958.)

1. Notions préliminaires.

a) La notion d'ensemble parfait linéaire non dense est familière. Il se construit sur la droite, en enlevant d'un intervalle, dit intervalle fondamental, une infinité dénombrable d'intervalles ouverts, non empiétants et sans extrémités communes, de telle façon que l'ensemble qui en résulte ne contienne aucun intervalle. Il sera souvent commode de construire un tel ensemble sur le tore à une dimension à la place de l'intervalle fondamental rectiligne.

Un ensemble symétrique du type de Cantor s'obtient en divisant l'intervalle fondamental en trois parties proportionnelles à ξ_1, $1-2\xi_1$, ξ_1 respectivement $\left(0<\xi_1<\frac{1}{2}\right)$ et en enlevant l'intervalle du milieu (intervalle « noir »). Les deux intervalles « blancs » restant sont tous deux divisés en trois parties proportionnelles à ξ_2, $1-2\xi_2$, ξ_2 respectivement $\left(0<\xi_2<\frac{1}{2}\right)$, et chaque intervalle médian est encore un intervalle « noir » enlevé. Etant donné une suite de nombres ξ_k $\left(0<\xi_k<\frac{1}{2}\right)$, on procède ainsi indéfiniment; à la $p^{\text{ème}}$ étape on obtient un ensemble E_p de 2^p intervalles « blancs » chacun de longueur $\xi_1 \dots \xi_p$, si l'intervalle fondamental est l'intervalle unité. L'intersection de tous les E_p fournit l'ensemble E cherché. Les points de l'ensemble, toujours dans l'intervalle fondamental (0, 1) ont leurs abscisses données par la formule

$$x=\varepsilon_1(1-\xi_1)+\varepsilon_2\xi_1(1-\xi_2)+\cdots+\varepsilon_p\xi_1\cdots\xi_{p-1}(1-\xi_p)+\cdots \tag{1}$$

où les ε_p sont égaux à 0 ou à 1.

---

*) Conférence faite à Rome et Genève, en mai et juin 1958.

Un cas particulier intéressant est celui où tous les ξ_p sont égaux à un nombre constant ξ; on obtient alors un ensemble du type de Cantor à rapport constant. Le cas classique de Cantor est celui où $\xi = 1/3$.

b) Etant donné une fonction monotone — non décroissante pour fixer les idées — soit $f(x)$ définie dans l'intervalle $(0, 1)$, nous appellerons coefficient de Fourier-Stieltjes de f l'intégrale de Riemann-Stieltjes:

$$c_n = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} e^{nix}\, df\,.$$

Si f est absolument continue, cette intégrale se réduit à une intégrale de Lebesgue et donc $c_n \to 0$ pour $n \to \infty$. Si f est continue et singulière $\left(\frac{df}{dx} = 0 \text{ p.p.}\right)$, c_n peut ne pas tendre vers zéro pour $n = \infty$, mais il existe des f singulières pour lesquelles $c_n \to 0$ pour $n \to \infty$ ainsi que l'a montré Menchoff en 1916.

c) Etant donné un ensemble parfait E, symétrique du type de Cantor, nous appellerons fonction de Lebesgue construite sur cet ensemble la fonction continue $y = f(x)$ telle que quand x appartient à E et est donné par (1), y soit égal à

$$\frac{\varepsilon_1}{2} + \frac{\varepsilon_2}{2^2} + \cdots + \frac{\varepsilon_p}{2^p} + \cdots$$

et que y soit constant dans chacun des intervalles contigus à E. Si E est de mesure nulle (ce qui est toujours le cas des ensembles à rapport constant) $f(x)$ est purement singulière. On démontre facilement en procédant par approximations successives, que le coefficient de Fourier-Stieltjes de la fonction de Lebesgue est donné par

$$2\pi c_n = e^{\pi n i} \prod_{k=1}^{\infty} \cos \pi n\, \xi_1 \cdots \xi_{k-1} (1 - \xi_k)\,.$$

Ainsi par exemple, pour la fonction de Lebesgue construite sur l'ensemble classique de Cantor à rapport constant $\xi = 1/3$ on trouve

$$2\pi c_n = e^{\pi n i} \prod_{k=1}^{\infty} \cos \frac{2\pi n}{3^k}$$

et on voit, dans ce cas, en prenant pour n des puissances successives de 3, que c_n ne tend pas vers zéro pour $n \to \infty$. Nous reviendrons plus loin sur le cas d'un rapport constant ξ quelconque, qui est plus complexe.

2. Le problème de l'unicité.

On peut le poser de la manière suivante. Existe-t-il sur $(0, 2\pi)$ des ensembles E tels qu'une série trigonométrique

$$\sum_{0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

converge vers zéro partout hors de E, sans être identiquement nulle ? Et, si oui, caractériser ces ensembles, qui sont dits « ensembles de multiplicité ». Un ensemble E tel que toute série trigonométrique convergeant vers zéro dans le complémentaire de E soit identiquement nulle est dit « ensemble d'unicité ».

Cantor a démontré par des méthodes célèbres que si E est vide, ou composé d'un nombre fini de points, E est un ensemble d'unicité. C'est aussi le cas si le dérivé de E est fini. Plus généralement, Cantor a démontré que tout ensemble réductible (c'est-à-dire admettant un dérivé vide de n'importe quel ordre, fini ou transfini) est un ensemble d'unicité.

Beaucoup plus tard, Young a démontré que tout ensemble dénombrable est un ensemble d'unicité.

Par contre, il est très facile de voir que tout ensemble E de mesure positive est un ensemble de multiplicité (il suffit de considérer la série de Fourier de la fonction caractéristique d'un ensemble parfait P de mesure positive contenu dans E).

La question de savoir s'il existait des ensembles de multiplicité de mesure nulle a été résolu par Menchoff en 1916; Menchoff a construit un ensemble parfait P de mesure nulle (du type de Cantor, à rapport variable) et une série trigonométrique non identiquement nulle convergeant vers zéro dans tout intervalle contigu à P.

Ceci a posé la question de la classification des ensembles parfaits de mesure nulle en ensembles d'unicité (ensembles U) et ensembles de multiplicité (ensembles M).