II. Singularités des fonctions inverses DES FONCTIONS MEROMORPHES.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **4 (1958)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

II. Singularités des fonctions inverses des fonctions méromorphes.

33. *Fonctions méromorphes en tout point à distance finie. Valeurs asymptotiques.*

Si $Z = f(z)$ est une fonction méromorphe en tout point à distance finie, mais qui ne se réduit pas à une fraction rationnelle, on peut construire un polynôme ou une fonction entière $g(z)$ admettant pour zéros les pôles de $f(z)$ avec les mêmes ordres de multiplicité. Le produit $f(z) \,.\, g(z)$ est alors une fonction entière, soit $h(z)$ de sorte que $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$; l'une au moins des deux fonctions $h(z)$, $g(z)$ qui sont sans zéros communs ne se réduit pas à un polynôme.

Considérons une courbe simple continue Γ dans le plan des z qui s'éloigne indéfiniment: une telle courbe est définie par une fonction $z(t)$ de la variable réelle t, définie pour $t \geqslant 0$ par exemple, telle que $z(t) \neq z(t')$ si $t \neq t'$ et telle que, si grand que soit A, il existe un nombre t_A pour lequel $|z(t)| \geqslant A$ si $t \geqslant t_A$. L'ensemble des valeurs $Z = f(z(t))$ pour $t \geqslant B$ est un ensemble continu, si nous ajoutons à cet ensemble ses points limites nous obtenons un ensemble $E(\Gamma, B)$ et lorsque B tend vers l'infini, l'ensemble limite de $E(\Gamma, B)$ est un ensemble, qui est l'ensemble commun aux $E(\Gamma, B)$; c'est un ensemble fermé $E(\Gamma)$ qui peut être une courbe, un point, tout le plan. Nous l'appellerons l'*ensemble d'indétermination de* f (z) *au point à l'infini de* Γ. Si cet ensemble se réduit à un point ω, nous dirons que ω est une *valeur asymptotique* de $f(z)$ et que la courbe Γ est un *chemin de détermination* ou *chemin de détermination* ω. Par exemple pour e^z, $z = x + iy$, la courbe $y = 0$, $x > 0$ est chemin de détermination infinie; $y = 0$, $x < 0$ est chemin de détermination 0; 0 et ∞ sont des valeurs asymptotiques. Mais pour $x = 0$, $y > 0$ l'ensemble d'indétermination à l'infini est la circonférence $|Z| = 1$; pour $x = \sin ky$, $y > 0$, k irrationnel, on obtient la couronne $\frac{1}{e} \leqslant |Z| \leqslant e$; et on voit comment on aura des chemins Γ d'indétermination complète pour lesquelles l'ensemble $E(\Gamma)$ sera le plan complet.

Si ω est valeur asymptotique pour $Z = f(z)$, il existe non seulement un chemin Γ de détermination ω, mais, à cause de la continuité, tout un ensemble de chemins de même détermination ω qui sont contigus à Γ. Deux chemins Γ, Γ' de même détermination ω sont contigus dans les deux cas suivants: 1° Γ et Γ' ont des points d'intersection aussi éloignés que l'on veut; 2° Γ et Γ' sont sans points communs à partir d'un point P qu'on peut considérer comme leur origine commune, ils déterminent alors deux domaines Δ et Δ'; dans l'un de ces domaines, soit Δ, existe une suite de courbes γ_n qui s'éloignent indéfiniment lorsque n croît indéfiniment, telles que chaque γ_n joint un point de Γ à un point de Γ' et que les valeurs de $f(z)$ sur γ_n tendent uniformément vers ω lorsque $n \to \infty$.

Une fonction méromorphe peut n'avoir aucune valeur asymptotique, c'est évidemment le cas pour les fonctions elliptiques. Mais *toute fonction entière admet* ∞ *comme valeur asymptotique.* C'est un cas particulier du théorème d'Iversen qui sera donné au n° 35.

Pour toute fonction entière de la classe W, il n'y a qu'une valeur asymptotique et tous les chemins de détermination sont contigus.

Sire a montré (*Bull. Soc. math.*, 1913) qu'une fonction entière d'ordre infini peut avoir une infinité non dénombrable de valeurs asymptotiques, Gross a construit un exemple de fonction entière dans lequel tout nombre complexe est valeur asymptotique (*Math. Ann.*, t. 79, 1918). Mais après avoir étudié certains cas particuliers, Denjoy a énoncé en 1907 la proposition suivante comme étant probable: une fonction entière d'ordre fini ρ a au plus 2ρ valeurs asymptotiques finies correspondant à des chemins non contigus. Carleman démontra en 1921 un résultat un peu moins précis; en 1930, Ahlfors démontra complètement le théorème de Denjoy; une démonstration différente fut donnée par Carleman en 1933 (*Comptes rendus*, t. 196).

Nous nous bornerons ici à démontrer la proposition élémentaire suivante:

Toute fonction méromorphe qui est le quotient de deux fonctions entières dont le module maximum vérifie la condition

$$\lim_{r=\infty} \frac{\log M(r)}{(\log r)^2} < \infty \tag{5}$$

possède au plus une valeur asymptotique et n'en a pas en général [26].

On a, en effet,

$$f(z) = \frac{h(z)}{g(z)}$$

avec

$$h(z) = \sum_0^\infty b_n z^n , \qquad g(z) = \sum_0^\infty a_n z^n , \tag{5}$$

et si c_n désigne le plus grand des deux nombres $| b_n |$ et $| a_n |$, la fonction

$$\varphi(z) = \sum_0^\infty c_n z^n$$

vérifie aussi la condition (5), par suite

$$\underline{\lim}_{n=\infty} \frac{-\log c_n}{n^2} > 0 .$$

On est dans le cas des fonctions à croissance lente du n° 16, on a pour les rapports rectifiés R_n la condition

$$\overline{\lim}_{n=\infty} \frac{R_{n+1}}{R_n} > 1 .$$

Si l'on prend m tel que $R_{m+1} > R_m k^2$, $k > 1$, $k R_m < r < k^2 R_m$, on obtient

$$\varphi(r) < c_m r^m \left(1 + \sum_1^\infty \left(\frac{r}{R_{m+1}}\right)^q + \sum_1^m \left(\frac{R_m}{r}\right)^q\right) < c_m r^m \left(1 + \frac{2}{k-1}\right) \cdot$$

On considère la fonction $f(z)$ dans les couronnes

$$k R_m < |z| < k^2 R_m ;$$

en posant $z = R_m \zeta$, on a à étudier la suite de fonctions $f(R_m \xi)$ dans la couronne $k < | \zeta | < k^2$. Pour chaque m l'un des nombres $| b_m |$, $| a_m |$ est égal à c_m; on peut extraire de la suite des m une suite S pour laquelle on a constamment, par exemple $| a_m | = c_m$. On a dans la couronne envisagée

$$h(R_m \zeta) = c_m \zeta^m R_m^m H(\zeta, m) , \qquad g(R_m \zeta) = c_m \zeta^m R_m^m G(\zeta, m)$$

et les fonctions $H(\zeta, m)$ et $G(\zeta, m)$ sont bornées dans leur ensemble dans la couronne $k < |\zeta| < k^2$; on peut extraire de la suite S une autre suite pour laquelle $H|\zeta, m)$ et $G(\zeta, m)$ tendront respectivement, uniformément vers des fonctions limites holomorphes $H(\zeta)$ et $G(\zeta)$ (théorème de Montel). En outre, comme pour $|z| = r$, on a $M(r, g) > c_m r^m$, la fonction $G(\zeta)$ n'est pas identiquement nulle. La fonction $\frac{H(\zeta)}{G(\zeta)}$ est une fonction méromorphe ou une constante finie. Ainsi, pour une suite S′ de valeurs de m, $f(R_m \zeta)$ converge uniformément dans la couronne vers une fonction méromorphe (qui peut être une constante finie). Supposons que $f(z)$ admette une valeur asymptotique ω. Pour chaque m de la suite S′ existera une courbe Γ_m traversant la couronne $k < |\zeta| < k^2$ et sur Γ_m, $f(\zeta R_m)$ tendra vers ω. Il s'ensuit que $\frac{H(\zeta)}{G(\zeta)} \equiv \omega$ et que ω est fini. Dans les couronnes

$$k R_m < |z| < k^2 R_m$$

de la suite S′, la fonction $f(z)$ tend vers ω uniformément. ω est la seule valeur asymptotique possible et tous les chemins de détermination ω sont contigus.

Cette proposition, qui s'étend aux fonctions algébroïdes, fonctions $u(z)$ définies par

$$A_0(z)\, u^{\nu} + A_1(z)\, u^{\nu-1} + \cdots + A_{\nu}(z) = 0 ,$$

où les $A_j(z)$ sont des fonctions entières [27)], a été étendue par Y. Tumura [28)]. Mais il existe des fonctions méromorphes, quotients de fonctions entières pour lesquelles

$$\log M(r) < \psi(r) (\log r)^2 ,$$

où $\psi(r)$ est indéfiniment croissante, mais croissant moins vite qu'une fonction croissante donnée arbitrairement, qui ont autant de valeurs asymptotiques que l'on veut [29)].

34. *Singularités des fonctions inverses des fonctions méromorphes.*

Hurwitz et Denjoy, en 1907, dans le cas des fonctions entières et Iversen (thèse, Helsingfors, 1914) dans le cas général des fonctions méromorphes sauf à l'infini, ont montré que les singularités de la fonction inverse qui ne sont pas des points critiques algébriques sont les valeurs asymptotiques de la fonction. Si $Z = f(z)$ est la fonction méromorphe donnée, sa fonction inverse $z = \Phi(Z)$ est définie par l'ensemble de ses éléments. Si z_0 est un point en lequel $f'(z_0) \neq 0$, la fonction $f(z)$ est holomorphe et univalente pour $|z - z_0| < r$ si $Z_0 = f(z_0) \neq \infty$, ce qui définit autour de Z_0 un élément de la fonction inverse holomorphe dans un cercle $|Z - Z_0| < R$. Si $Z_0 = \infty$, on définit un élément holomorphe au point à l'infini du plan Z. On peut passer de l'un de ces éléments de $\Phi(Z)$ à un autre par prolongement analytique: il suffit de joindre le point z_0 fournissant l'élément $\Phi(Z, Z_0, z_0)$ au point z_1 du plan z fournissant $\Phi(Z, Z_1, z_1)$, par une ligne polygonale ne passant par aucun des zéros de $f'(z)$ pour obtenir ce prolongement. On définit en même temps des éléments circulaires de la surface de Riemann sur laquelle $\Phi(Z)$ sera uniforme. Si au point z_0, Z_0 est fini, mais $f'(z_0) = 0$, on a pour $|z - z_0| < r$,

$$Z = f(z) = Z_0 + c_p (z - z_0)^p + \cdots, \qquad p > 1$$

ce qu'on peut écrire, en posant $Z - Z_0 = u^p$,

$$u = \sqrt[p]{c_p}\,(z - z_0)\,[1 + \Psi(z - z_0)]^{\frac{1}{p}}, \tag{6}$$

la série entière $\Psi(z - z_0)$ définissant une fonction holomorphe et nulle pour $z = z_0$. La racine d'ordre p définit p fonctions holomorphes qui se déduisent de l'une d'elles par multiplication par les racines de l'unité. On peut faire l'inversion dans (6), on obtient

$$z - z_0 = \frac{u}{\sqrt[p]{c_p}}\,(1 + \Theta(u))$$

et, en remplaçant u par la racine d'ordre p de $Z - Z_0$ on obtient une fonction à p branches, régulières en chaque point dans un domaine $0 < |Z - Z_0| < r$, qui se permutent entre elles par rotation autour de Z_0. Le point Z_0 est un point critique algébrique de Φ (Z), la fonction est bien définie en ce point et autour de ce point par

$$z = z_0 + \frac{(Z - Z_0)^{\frac{1}{p}}}{c_p^{\frac{1}{p}}}\left[1 + \Theta\left((Z - Z_0)^{\frac{1}{p}}\right)\right].$$

On a un élément algébrique de Φ (Z) autour de Z_0, défini dans un certain cercle de centre Z_0. On incorpore le point Z_0 à la surface de Riemann décrite par $Z = f(z)$. Si $Z_0 = \infty$, on opère sur $\frac{1}{Z}$ et l'on obtient un élément algébrique lorsque la racine est multiple

$$z = z_0 + \frac{1}{(c_p Z)^{\frac{1}{p}}}\left[1 + \Theta\left(Z^{-\frac{1}{p}}\right)\right].$$

Autour d'un point critique algébrique, l'élément de la surface de Riemann est composé de p feuillets circulaires ayant pour centre ce point et qui se raccordent le long de rayons superposés. Le passage d'un élément holomorphe ou algébrique à un autre se fait encore en considérant dans le plan des z une ligne joignant les deux points correspondant aux deux centres, donc au moyen d'un nombre fini d'éléments intermédiaires tels que chacun d'eux est un prolongement du précédent. Nous appellerons Φ (Z, Z_0, z_0) un élément holomorphe ou algébrique, la notation désignant à la fois la série qui définit l'élément et le cercle de convergence de cette série.

Supposons que le point Z décrive la surface de Riemann, ce qui revient à dire que l'on fait le prolongement analytique à partir d'un élément Φ (Z, Z_0, z_0). Utilisons uniquement les éléments holomorphes. Si l'on fait décrire à Z' une ligne γ tracée sur la surface et si l'on considère les éléments Φ (Z, Z', z'), lorsque γ aboutit à un point non critique Z_1, le rayon de Φ (Z, Z', z') tend vers le rayon Φ (Z, Z_1, z_1) de l'un des éléments de centre Z_1. Si Z_1 est point critique algébrique, dès que Z' sera assez voisin de Z_1, le point Z_1 sera un point singulier de l'élément Φ (Z, Z', z'), le rayon de cet élément tendra vers zéro [30)]. *Les autres points singuliers de la surface sont des points qui ne lui* *appartiennent pas mais dont on peut approcher d'aussi près que l'on veut en restant sur la surface, donc par prolongement analytique.* Lorsqu'on fait le prolongement, on doit pouvoir trouver une courbe γ de la surface qui s'approche autant que l'on veut du point en question Ω, c'est-à-dire qui reste dans un cercle de centre Ω et de rayon aussi petit que l'on veut à partir d'un de ses points, et telle que le prolongement est possible le long de γ, *le rayon des éléments* $\Phi(Z, Z', z')$ *dont les centres* Z' *sont sur* γ *tendant vers zéro lorsque* $|Z' - \Omega|$ *tend vers zéro* [31]. Lorsqu'il existera un élément algébrique $\Phi(Z, \Omega, z_k)$, $\Omega = f(z_k)$, tel que $\Phi(Z, Z', z')$ coïncide à partir d'une valeur de Z' avec $\Phi(Z, \Omega, z_k)$ dans la partie commune des cercles de convergence, le point Ω sera simplement un point critique algébrique, sinon ce sera vraiment un point singulier sur un feuillet ou plusieurs feuillets de la surface de Riemann et de la fonction inverse $\Phi(Z)$.

Nous allons préciser un peu la façon dont se comportent les éléments $\Phi(Z, Z', z')$. Il est possible que certains de ces éléments contiennent le point Ω, c'est-à-dire que, pour certains Z', avec $Z' - \Omega$ tendant vers zéro, $\Phi(Z, Z', z')$ prenne la valeur Ω; donc que cet élément et un $\Phi(Z, \Omega, z_k)$ coïncident dans la portion commune de leurs cercles de convergence, *mais il n'est pas possible que cela ait lieu pour tous les* Z' *de* γ *suffisamment proches de* Ω. Car si $\Phi(Z, Z', z')$ contenait Ω pour tous les Z' de γ à partir de l'un d'eux, Z' variant continûment, $\Phi(Z, Z', z')$ aurait une portion commune avec un même élément $\Phi(Z, \Omega, z_k)$, de rayon $R(z_k)$ et dès que $|Z' - \Omega|$ serait inférieur à $\frac{1}{2} R(z_k)$, le rayon de l'élément $\Phi(Z, Z', z')$ serait au moins $\frac{1}{2} R(z_k)$, il ne tendrait pas vers zéro.

Inversement, *s'il existe une courbe* γ *tendant vers* Ω *le long de laquelle le prolongement est possible et s'il existe des* Z' *sur cette courbe aussi proches que l'on veut pour lesquels* $\Phi(Z, Z', z')$ *ne contient pas* Ω, Ω *est point singulier.* Car les rayons des éléments ne contenant pas Ω tendent vers zéro. Si un élément $\Phi(Z, Z'', z'')$ contient Ω et si à partir de ce point Z'' de γ, $|Z' - \Omega| < \varepsilon$, le rayon de cet élément est au plus 3ε, sinon tous les points de γ à partir de Z'' appartiendraient à $\Phi(Z, Z'', z'')$, et puisque $|Z' - Z''| < 2\varepsilon$, tous les $\Phi(Z, Z', z')$ contiendraient Ω.

On a utilisé seulement les éléments holomorphes, donc on a supposé que la courbe γ ne passe pas par les points critiques algébriques. Si l'on prend une courbe passant par ces points, on peut la déformer d'aussi peu que l'on veut au voisinage de chacun de ces points sans qu'elle cesse d'être sur la surface. Il s'ensuit qu'on peut utiliser tous les éléments aussi bien algébriques qu'holomorphes dans la définition des points singuliers.

Ces explications données, on va montrer que *lorsque le point* Z *tend vers un point singulier (non algébrique) de la surface de Riemann,* $z = \Phi(Z)$ *tend vers l'infini, c'est-à-dire que les singularités de la surface correspondent nécessairement aux valeurs asymptotiques de* $Z = f(z)$.

Dans un cercle $|z| \leqslant M$, l'équation $f(z) = \Omega$ a un nombre fini de racines (si Ω est infini, il s'agit des pôles), on peut isoler ces racines z_k par des petits cercles de centres z_k, extérieurs les uns aux autres et de rayons assez petits pour que, lorsque z est dans le cercle de centre z_k, $Z = f(z)$ appartienne à l'élément $\Phi(Z, \Omega, z_k)$. On peut d'ailleurs supposer que M a été choisi de façon qu'il n'y ait pas de points z_k sur la circonférence $|z| = M$ et enfin que les petits cercles ne coupent pas cette circonférence. La fonction $\frac{1}{f(z) - \Omega}$ est holomorphe dans $|z| \leqslant M$ à l'extérieur des petits cercles et sur leurs circonférences, son module a un maximum $\frac{1}{\varepsilon}$. Dans ces conditions, si $|Z - \Omega| < \varepsilon$, le point $z = \Phi(Z)$ est ou bien extérieur au cercle $|z| \leqslant M$ ou bien intérieur à l'un des petits cercles. Or lorsque Z tend vers le point singulier Ω, il ne peut pas appartenir à un même élément $\Phi(Z, \Omega, z_k)$, donc $|z| > M$, ce qui démontre la proposition.

Inversement, si ω est valeur asymptotique de $Z = f(z)$, c'est une singularité (non algébrique évidemment) de la fonction inverse. Car lorsque z' décrit le chemin Γ de détermination ω, $Z' = f(z')$ décrit une courbe γ qui se rapproche indéfiniment du point ω et le rayon de l'élément $\Phi(Z, Z', z')$ tend vers zéro. Sinon on aurait pour un élément $\Phi(Z, Z'', z'')$ un rayon supérieur à 3ε, et à partir de cette valeur Z'', on aurait $|Z' - \omega| < \varepsilon$, les Z' appartiendraient à l'élément $\Phi(Z, Z'', z'')$, ce qui est impossible puisque $z' = \Phi(Z', Z'', z'')$ serait alors borné.

En définitive:

Les singularités (autres que les singularités algébriques) de la surface de Riemann décrite par les valeurs d'une fonction méromorphe $f(z)$ dans tout le plan à distance finie correspondent aux valeurs asymptotiques de cette fonction. A deux chemins Γ, Γ' de détermination ω qui sont contigus correspondent des courbes γ et γ' aboutissant à ω et telles que l'on peut les joindre par des courbes de la surface de Riemann qui sont aussi voisines que l'on veut de ω, ces chemins γ, γ' doivent être considérés comme aboutissant à une seule singularité ω.

Les surfaces de Riemann correspondant aux fonctions entières de la classe W ont donc une seule singularité qui est à l'infini.

35. *Théorèmes de Lindelöf et d'Iversen.*

Lindelöf a étendu le théorème de Cauchy sur le maximum du module. Nous nous bornerons à l'énoncé suivant:

Théorème de Lindelöf. — *Soit un domaine borné* D *de frontière F et une fonction* f (z) *holomorphe dans* D *et continue sur* D + *F sauf en un point* O *de F. Si* $|f(z)| \leqslant M$ *sur F sauf en* O *et si* $|f(z)| < K$ *dans* D *au voisinage de* O, *on a dans tout* D

$$|f(z)| \leqslant M$$

Comme D est borné, on peut par transformation homographique se ramener au cas où O est l'origine et où D est dans le cercle $|z| < 1$. Dans ces conditions, si $\varepsilon > 0$, la fonction $z^{\varepsilon} f(z)$ n'est pas surement holomorphe dans D, mais seulement analytique, mais le théorème de Cauchy s'applique encore à son module qui est uniforme. Sur F, O excepté, on a $|z^{\varepsilon} f(z)| \leqslant M$. Soit z_0 un point de D; prenons r assez petit pour que, pour $|z| < r$ on ait $|f(z)| < K$ et par suite $|z^{\varepsilon} f(z)| < K r^{\varepsilon}$; on pourra prendre r assez petit pour que $K r^{\varepsilon} < M$ et $r < |z_0|$. Appliquons le théorème de Cauchy à $z^{\varepsilon} f(z)$ dans le domaine formé par la portion de D contenant z_0 et extérieure à $|z| \leqslant r$. Comme sur la frontière constituée par des points de F et de $|z| = r$, le module est au plus M, on aura aussi au point z_0

$$\left|z_0^{\varepsilon} f(z_0)\right| \leqslant M .$$

Donc $| f(z_0) | \leqslant M e^{-\varepsilon \log |z_0|}$ et puisque $\varepsilon > 0$ est arbitraire

$$| f(z_0) | \leqslant M .$$

Il est clair que le théorème s'applique à un domaine D quelconque mais tel qu'il y ait des points extérieurs permettant de se ramener au cas de l'énoncé.

De ce théorème, on déduit le suivant qui servira de lemme pour la démonstration du théorème d'Iversen [32]:

Théorème II. — *Si la fonction* f (z) *est holomorphe dans un domaine borné* D *et continue sur* D *et sur la frontière F sauf en un point* O *de F; si sur F,* O *excepté,* $| \mathrm{f}(z) | = M$ *tandis que* $| \mathrm{f}(z) | < M$ *dans* D, *on a deux alternatives:* 1° f (z) *s'annule en un point au moins de* D; 2° *il existe dans* D *une courbe continue aboutissant à* O *sur laquelle* f (z) *tend vers zéro lorsque* z *tend vers* O.

Supposons que $f(z)$ ne s'annule pas dans D. Alors $\frac{1}{f(z)}$ est holomorphe dans D; et sur F, O excepté $\left| \frac{1}{f(z)} \right| = \frac{1}{M}$; donc $\frac{1}{f(z)}$ n'est pas bornée au voisinage de O, sinon, d'après le théorème de Lindelöf, on aurait dans D, $\left| \frac{1}{f(z)} \right| \leqslant \frac{1}{M}$ en contradiction avec l'hypothèse $| f(z) | < M$. Il existe donc un domaine D_1 intérieur à D et admettant O comme point frontière dans lequel $\left| \frac{1}{f(z)} \right| > \frac{2}{M}$. Dans D_1 on a $| f(z) | < \frac{M}{2}$; sur sa frontière, O excepté, $| f(z) | = \frac{M}{2}$ et $f(z)$ ne s'annule pas dans D_1. On peut recommencer le raisonnement indéfiniment. On peut joindre un point de F à un point z_1 de la frontière de D_1 (autre que O) par un chemin intérieur à D, puis z_1 à un point z_2 en lequel $| f(z_2) | = \frac{M}{4}$ par un chemin appartenant à D_2, et ainsi de suite, ce qui définit une courbe γ de D sur laquelle $| f(z) |$ tend vers zéro. γ est composée d'arcs successifs $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n, \ldots$, l'arc γ_n appartenant à D_n. Les arcs γ_n n'ont pas de points limites intérieurs à D puisqu'en un tel point on aurait $f(z) = 0$, leur seul point d'accumulation est O.

Théorème d'Iversen. — *Soit* Σ *la surface de Riemann décrite par les valeurs d'une fonction méromorphe, c'est-à-dire une* *surface simplement connexe du type parabolique. Soit* Z_0 *un point du plan et* Z_1 *un point de la surface* Σ, $|Z_0 - Z_1| = \rho$. *Il est possible de joindre* Z_1 *à* Z_0 *par une courbe intérieure au cercle* $|Z - Z_0| < \rho$ *qui appartient à la surface sauf peut-être son extrémité* Z_0.

Considérons, en effet, dans le plan z le domaine D défini par $|f(z) - Z_0| < \rho$ qui contient le point $z_1 = \Phi(Z_1)$ sur sa frontière F. Si le domaine D contient un point z_0 en lequel $f(z_0) = Z_0$ la proposition est établie. Dans le cas contraire, D n'est pas borné (sinon dans D borné $\frac{1}{f(z) - Z_0}$ holomorphe n'atteindrait pas son maximum sur le contour). Mais on peut le ramener à un domaine borné par transformation homographique et appliquer le théorème II ; il s'ensuit que dans D on a un chemin joignant z_1 au point à l'infini sur lequel $f(z)$ tend vers Z_0. Le cas où le chemin considéré dans l'énoncé n'a pas son extrémité dans Σ est celui où Z_0 est valeur asymptotique.

Du théorème d'Iversen on déduit que si Z_1 est un point de Σ et L une courbe simple issue de Z_1, on peut tracer un chemin qui joint Z_1 au voisinage d'un point de L en restant dans le voisinage de L. Il suffit d'appliquer le théorème de proche en proche à des petits cercles centrés sur L et suffisamment rapprochés.

Comme corollaire, on voit que *si une valeur* Ω *n'est pas prise par une fonction méromorphe, cette valeur est valeur asymptotique.* En particulier, *pour toute fonction entière, l'infini est valeur asymptotique.*

36. *Théorème de Gross.*

Si l'on considère un élément $\Phi(Z, Z_0, z_0)$, $Z_0 \neq \infty$ *holomorphe de la fonction inverse* $z = \Phi(Z)$ *d'une fonction méromorphe, on peut prolonger cet élément jusqu'à l'infini sur les rayons* $\arg(Z - Z_0) = \varphi = \text{const.}$ *sauf au plus pour des* φ *appartenant à un ensemble de mesure nulle.*

Pour l'établir, on peut se borner à considérer les rayons $\arg(Z - Z_0) = \varphi$ dans un cercle $|Z - Z_0| < R$. Car si l'on peut atteindre la circonférence de ce cercle sauf pour un ensemble de mesure nulle de valeurs φ, il suffira de donner à R les valeurs

1, 2, ..., n, ... et comme une suite d'ensembles de mesures nulles est de mesure nulle, le théorème sera démontré.

D'autre part, l'ensemble E_1 des valeurs de φ pour lesquelles le rayon passe par un point critique algébrique $Z_k = f(z_k)$, $f'(z_k) = 0$ est dénombrable, ce sont les rayons passant par un point critique transcendant qui sont seuls à considérer.

Nous faisons donc le prolongement radial de l'élément $\Phi(Z, Z_0, z_0)$ dans le cercle $|Z - Z_0| < R$, R étant supérieur au rayon R_0 du cercle d'holomorphie de cet élément, et nous supposons que dans ce prolongement nous rencontrons des points critiques transcendants. Nous définissons un domaine Ω qui contient le cercle $|Z - Z_0| < R_0$ et dans lequel $z = \Phi(Z)$ est holomorphe. A ce domaine correspond dans le plan des z un domaine ω contenant le cercle $|z - z_0| < r_0$ dans lequel $Z = f(z)$ est univalente et holomorphe et qui n'est pas borné puisqu'il contient des chemins de détermination. Si l'on coupe ce domaine par une circonférence $|z - z_0| = r$, on obtient sur cette circonférence des arcs A_r de longueur totale $s(r)$. A ces arcs correspondent des arcs de courbes du plan des Z qui coupent les rayons $|Z - Z_0| = \varphi$ passant par les points critiques transcendants puisque, à ces rayons correspondent des chemins de détermination finie allant à l'infini et intérieurs à ω. Si l'on considère les valeurs de φ correspondant à ces arcs, elles forment des intervalles dont la longueur est au moins égale au produit de $s(r)$ par $\frac{1}{d}$, d étant la plus courte distance de ces arcs à l'origine Z_0. Cette plus courte distance d est supérieure à la plus courte distance de la courbe transformée de $|z - z_0| = r_0$, donc à un nombre fixe d_0. Les intervalles contenant l'ensemble $E - E_1$ des φ pour lesquels le prolongement est impossible ont donc une longueur au plus égale à $\frac{s(r)}{d_0}$. Or on a

$$s(r) = \int_{A_r} |f'(z)|\, dt = \int_{A_r} |f'(z)|\, r d\varphi\,, \qquad z = re^{i\varphi}\,,$$

donc d'après la formule de Schwarz

$$s(r)^2 \leqslant \int_{A_r} |f'(z)|^2\, r d\varphi \cdot 2\pi r$$

et comme A (r) étant l'aire de Ω correspondant à la portion de ω limitée par $|z - z_0| = r$, on a

$$A(r) = \int_0^r \int_0^{2\pi} |f'(z)|^2 r dr\, d\varphi ,$$

l'inégalité s'écrit

$$s(r)^2 \leqslant 2\pi r \frac{d A(r)}{dr} .$$

On a donc

$$\int_{r_0}^{\infty} \frac{s(r)^2 dr}{r} \leqslant 2\pi [A(r) - A(r_0)] < 2\pi^2 R^2 .$$

Ceci montre que $s(r)$ a pour limite inférieure pour r infini la valeur 0 puisque, dans le cas contraire le premier membre de cette inégalité serait infini. On a donc des r pour lesquels $s(r) < \varepsilon$ ce qui montre que les points de $E - E_1$ appartiennent à des intervalles dont la somme des longueurs est aussi petite que l'on veut. $E - E_1$ est de mesure nulle et le théorèmees t démontré.

37. *Classification d'Iversen.*

Si ω est une singularité transcendante de la fonction inverse $z = \Phi(Z)$, c'est-à-dire aussi de la surface de Riemann, il existe un chemin γ_ω le long duquel un élément $\Phi(Z, Z', z')$ prolongé le long de γ_ω tend vers ∞, ce chemin γ_ω tendant vers ω. Supposons ω fini, sinon on considérerait Φ comme fonction de $\frac{1}{Z}$ · A partir d'un point Z'' de γ_ω, ce chemin reste dans le cercle C_R, $|Z - \omega| < R$; si Z' est un point de cette portion on peut prolonger $\Phi(Z, Z', z')$ à partir de cet élément en restant dans C_R. *Si, en opérant ainsi à partir de* γ_ω, *on peut choisir* R *assez petit pour qu'on ne rencontre pas d'autres singularités transcendantes que* ω, *on dit que* ω *est une singularité transcendante isolée.* Le prolongement effectué dans C_R définit un morceau Σ_ω^R de la surface de Riemann auquel la fonction $z = \Phi(Z)$ fait correspondre un domaine D_ω^R du plan des z; c'est un domaine illimité qui contient des chemins de détermination ω et qui ne contient pas d'autres chemins de détermination; en faisant décroître R, on voit que tous ces chemins de détermination ω sont contigus.

Iversen a donné dans sa Thèse (1914) une classification des singularités transcendantes isolées qui complète et précise un essai antérieur de Boutroux.

Si l'on peut choisir R assez petit pour que Z ne prenne pas la valeur ω dans C_R, c'est-à-dire si ω n'appartient pas à Σ_ω^R, ou encore si $f(z)$ ne prend pas la valeur ω dans D_ω^R, le point ω est appelé *point transcendant directement critique.* En outre, si l'on peut choisir R assez petit pour que $\Phi(Z)$ n'admette pas de singularités algébriques dans C_R, ω *est dit de première espèce*; dans le cas contraire, ω est point limite de points critiques algébriques, il est dit de *seconde espèce.*

Si ω n'est pas directement critique, il existe des éléments $\Phi(Z, Z', z')$, avec $|Z' - \omega| < \varepsilon$, qui contiennent ω, autrement dit D_ω^R contient des racines de $f(z) - \omega$ si petit que soit R. Si sur tout rayon $\arg(Z' - \omega) = \text{const.}$, $\Phi(Z, Z', z')$ où $\Phi(Z, Z', z')$ peut être un élément algébrique, tend vers une valeur finie, ou si l'on préfère si la valeur de $\Phi(Z)$ finit par coïncider avec un élément $\Phi(Z, \Omega, z_k)$ lorsque Z tend vers ω sur un rayon de C_R, le point ω est dit *point transcendant indirectement critique.*

Un point critique transcendant (qui est isolé) n'appartenant pas à l'une ou l'autre de ces deux catégories est dit *point directement et indirectement critique.*

Ahlfors a montré que le nombre des chemins d'indétermination finie non contigus des fonctions entières d'ordre ρ est au plus égal à 2ρ, il s'ensuit que le nombre de singularités à l'infini, pour $\rho > \frac{1}{2}$ est aussi au plus égal à 2ρ, ainsi que le nombre des singularités transcendantes à distance finie. Nous admettrons ces résultats qui rentrent dans un énoncé plus général dû à Ahlfors [33)].

Si $Z = f(z)$ est une fonction entière d'ordre fini, toutes les singularités transcendantes de la fonction inverse sont isolées; la classification d'Iversen s'applique. Si ω est singularité transcendante à distance finie, le domaine D_ω^R qui est illimité est borné par un nombre fini de courbes. Car si D_ω^R est ce domaine et si sa frontière sur laquelle $|f(z) - \omega| = R$ comporte une courbe illimitée Γ, cette courbe Γ est aussi frontière d'un domaine non borné dans lequel $|f(z) - \omega| < R$. D'après le théorème du n° 35, ce domaine contient un chemin de détermination infinie. A chaque frontière Γ correspond un chemin de détermination infinie et les chemins ainsi obtenus pour deux frontières ne sont pas contigus; il n'y en a qu'un nombre fini. Alors, en diminuant R on voit que l'on aura une seule courbe frontière. Par suite

Si f (z) *est fonction entière d'ordre fini et si* ω *est une valeur asymptotique finie, le domaine* $|\mathrm{f}(\mathrm{z}) - \omega| > \varepsilon$ *contenant les chemins de détermination* ω *est limité par une seule courbe dès que* ε *est assez petit.*

On voit de même que si ω est fini et directement critique et si ω' est une singularité algébrique appartenant à C_R, les courbes $| f(z) - \omega | = | \omega' - \omega |$ décomposent D_ω^R en au moins deux domaines d'indétermination finie; on pourra, d'après ce qui précède, prendre R assez petit pour que cette circonstance soit impossible. Donc

Pour une fonction entière d'ordre fini, les points directement critiques à distance finie de la fonction inverse sont tous de première espèce.

Mais les singularités transcendantes à l'infini, *qui sont directement critiques puisque* f (z) *ne prend pas la valeur infinie*, peuvent être de seconde espèce. On a vu (nº 29) que la singularité à l'infini des fonctions inverses des fonctions de la classe W est de seconde espèce.

38. *Remarques sur la décomposition en feuillets de la surface de Riemann. Feuillets singuliers et division impropre.*

L'idée la plus simple pour décomposer en feuillets la surface de Riemann décrite par les valeurs Z d'une fonction $f(z)$ que nous supposerons entière et d'ordre fini est d'utiliser les étoiles d'holomorphie de la fonction inverse $z = \Phi(Z)$. On considère les éléments $\Phi(Z, 0, z_k)$, $f(z_k) = 0$ et on les prolonge radialement après avoir coupé le long d'une demi-droite arg Z = const., si l'élément est algébrique. On obtient ainsi des feuillets (qui pour toute fonction inverse de fonction méromorphe sont illimités d'après le théorème de Gross) qui dans le cas actuel sont des domaines dont les frontières sont des demi-droites, arg Z = const., formant sur chaque feuillet un ensemble dénombrable. A ces feuillets correspondent dans le plan des z des domaines limités par des courbes d'argument constant. Si ces domaines, leurs frontières et les points limites de ces frontières couvrent le plan des z en entier à distance finie, on a fait à la fois la division du plan des z en domaines d'univalence et la division de la surface de Riemann en feuillets dont le raccordement est donné par la considération du plan des z. Dans le cas contraire, l'origine est point critique transcendant; s'il y a à l'origine un point directement critique, il est de première espèce et l'on a une infinité de feuillets aboutissant à l'origine; s'il y a un point directement et indirectement critique il peut exister des feuillets incomplets aboutissant à l'origine, dont l'angle d'ouverture est moindre que 2π.

On peut éviter les feuillets de cette dernière espèce en changeant Z en $Z + k$ de façon à n'avoir plus de singularité transcendante à l'origine. Toute la surface de Riemann est alors fournie par les feuillets obtenus en prolongeant les éléments $\Phi(Z, 0, z_k)$. Mais il pourra arriver que sur certains feuillets la frontière ne soit pas entièrement accessible par suite de la présence d'un point critique transcendant qui, d'après les propositions du nº 37, ne peut pas être directement critique puisqu'il serait isolé des singularités algébriques, et qui n'est pas indirectement critique puisqu'on ne pourrait pas l'atteindre par prolongement radial, c'est donc un point directement et indirectement critique. Le domaine correspondant du plan des z sera un *domaine complet singulier d'univalence*; dans ce domaine et sur sa frontière à distance finie, $f(z)$ prend des valeurs dont l'ensemble complémentaire contient une ligne.

La jonction des feuillets, c'est-à-dire des domaines d'univalence, peut aussi présenter des anomalies. Il peut se faire que pour passer d'un feuillet à un autre il soit nécessaire de passer sur une infinité d'autres feuillets. On aura une *division impropre du plan* z *en domaines d'univalence.*

La fonction

$$Z = \frac{e^z - 1}{z} + h$$

où h est une constante présente des circonstances de ce genre. Dans le cas $h = 0$, déjà étudié par Iversen, la division en feuillets par les lignes arg $Z =$ const., fournit un feuillet incomplet; pour $h = -1$, il existe un feuillet singulier [34)]; pour $h = 1$, on obtient une division impropre.

L'étude de la division du plan des z en domaines complets d'univalence pour une fonction méromorphe générale $Z = f(z)$ a été l'objet de travaux de Shimizu [25] et de Marty. Elle demande de nouveaux efforts.

39. *Remarque sur les surfaces du type hyperbolique.*

Si l'on considère une fonction $Z = f(z)$ méromorphe pour $|z| < 1$ et admettant la circonférence $|z| = 1$ comme coupure, sa fonction inverse est uniforme sur une surface du type hyperbolique dont l'étude des singularités est peu avancée. Les valeurs asymptotiques sont ici les valeurs limites sur des chemins tendant vers la circonférence C, $|z| = 1$. Les considérations du nº 34 s'étendent, les singularités de la fonction inverse autres que les singularités algébriques sont fournies par les valeurs asymptotiques. Le théorème d'Iversen n'est plus valable en général non plus que le théorème de Gross dont la démonstration tombe évidemment en défaut.

La fonction spéciale étudiée au nº 31 rentre dans la classe générale des fonctions holomorphes et non bornées pour $|z| > 1$ telles que chaque $F(z)$ est bornée sur un chemin simple $L = L(F)$, $z = z(t; F)$, $t \geqslant 0$ avec $\lim_{t=\infty} |z(t, F)| = 1$, tout point de $|z| = 1$ étant point limite des valeurs $z(t, F)$. Le théorème d'Iversen s'étend à ces fonctions. Lorsqu'on suppose que sur $L(F)$ l'une des limites d'indétermination de $z(t)$ pour t infini est infinie, on a

$$\overline{\lim_{r \to 1}} \frac{\log_3 M(r, F)}{\log \dfrac{1}{1-r}} \geqslant 1 .$$

la croissance est très rapide.

III. Caractéristique de Nevanlinna et propriété de N (r, Z).

40. *Fonction* T (r, f) *de Nevanlinna.*

On a vu (nº 18) que, si $f(z)$ est méromorphe pour $|z| \leqslant r$, si $f(0) \neq 0, \infty$ et si $n(x)$ désigne le nombre des zéros et $p(x)$ le nombre des pôles pour $|z| \leqslant x$, on a