SUR LES NOMBRES PREMIERS DE LA FORME $n^n + 1$

Autor(en): **Sierpiski, W.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **4 (1958)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **22.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-34636

Dies waren einige Proben, an denen gezeigt werden sollte, wie sich der zu Anfang erwähnte Gedanke, komplexe Zahlen im Zusammenhang mit dem Einheitskreis zu verwenden, nutzbringend verwenden läßt. Es gibt sehr viele weitere einfache Anwendungen; da es nur um die Fixierung der Gedanken geht, soll nicht weiter auf sie eingegangen werden.

SUR LES NOMBRES PREMIERS DE LA FORME $n^n + 1$

par W. SIERPIŃSKI (Varsovie).

(Reçu le 11 décembre 1957.)

Le but de cette Note est de démontrer le théorème suivant: *Parmi les nombres ayant au plus trois cent milles chiffres* (en système décimal) *il n'y en a que trois*, 2, 5 *et* 257 *qui sont des nombres premiers de la forme* $n^n + 1$, *où* n *est un nombre naturel.*

DÉMONSTRATION. — Le nombre $1^1 + 1 = 2$ est premier. Soit maintenant n un nombre naturel > 1 et supposons que le nombre $n^n + 1$ est premier. Si n avait un diviseur premier impair p, on aurait $n = kp$, où k est un nombre naturel et le nombre $n^n + 1 = (n^k)^p + 1$ serait divisible par le nombre naturel $n^k + 1$ qui est > 1 et $< n^n + 1$ (puisque $k < kp = n$), ce qui est impossible. Donc n n'a aucun diviseur premier impair et, comme $n > 1$, on a $n = 2^s$, où s est un nombre naturel. Si s avait un diviseur premier q impair, on aurait $s = kq$, où k est un nombre naturel, et le nombre $n^n + 1 = 2^{sn} + 1 = (2^{kn})^q + 1$ serait divisible par le nombre naturel $2^{kn} + 1$ qui est > 1 et $< n^n + 1$ (puisque $2^{kn} < 2^{knq} = n^n$), ce qui est impossible. Le nombre s n'a donc aucun diviseur premier impair, donc $s = 2^m$, où m est un entier $\geqslant 0$.

Nous avons ainsi démontré que si n est un nombre naturel > 1 et si le nombre $n^n + 1$ est premier, on a $n = 2^{2^m}$, où m est un entier $\geqslant 0$, donc $n^n + 1 = 2^{2^{m+2^m}} + 1 = F_{m+2^m}$, où F_k est le k-ième nombre de Fermat, $F_k = 2^{2^k} + 1$. Donc, les seuls nombres $n^n + 1$ premiers, où n est un nombre naturel > 1, sont les nombres premiers de la forme F_{m+2^m}, où m est un entier $\geqslant 0$.

Pour $m = 0$, on obtient le nombre premier $F_1 = 2^2 + 1 = 5$, pour $m = 1$ — le nombre premier $F_3 = 257 = 4^4 + 1$. Pour $m = 2$, le nombre F_6 est composé, divisible par le nombre premier 274177 (voir, par exemple, M. KRAITCHIK, *Introduction à la Théorie des Nombres*, Paris, 1952, p. 4).

Pour $m = 3$, le nombre F_{11} est composé, divisible par le nombre premier $39.2^{13} + 1$ (voir *ibidem*). Donc, s'il existe un nombre premier de la forme $n^n + 1$, où n est un nombre naturel > 4 , ce nombre est $\geqslant F_{m+2^m}$ où $m = 4$, donc est $\geqslant F_{20}$. Or, comme $2^{10} > 10^3$, on a $2^{20} > 10^6$, d'où $2^{2^{20}} > 2^{10^6} = (2^{10})^{10^5} > 10^{3.10^5}$ et on en conclut que le nombre $F_{20} = 2^{2^{20}} + 1$ a plus que 3.10^5 chiffres.

Notre théorème se trouve ainsi démontré.

Vu notre théorème, on pourrait exprimer l'hypothèse H qu'il existe seulement trois nombres premiers de la forme $n^n + 1$, où n est un nombre naturel, notamment seulement les nombres 2, 5 et 257. Il est à remarquer que de cette hypothèse H il résulte l'existence d'une infinité de nombres de Fermat F_n composés. Tels seraient, d'après H, tous les nombres $F_{m+2^m} = \left(2^{2^m}\right)^{2^{2^m}} + 1$, où $m = 2, 3, 4, \ldots$