

7. Vom Flächeninhalt.

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **4 (1958)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Weiterhin ist

$$m\bar{m} = \frac{s\bar{s}}{(s\bar{s} - 1)^2} = \frac{4abcd \cdot \Sigma a \cdot \Sigma abc}{(\Sigma a \cdot \Sigma abc - 4abcd)^2} = |m|^2.$$

Zur Bestimmung des Umkreishalbmessers r bilden wir

$$\frac{2ab}{a+b} - m = \frac{2ab(-bdc - acd + abd + abc)}{(a+b)(b+c)(c+d)(d+a)}$$

und den dazu konjugiert komplexen Wert. Dann ergibt sich nach kurzer Rechnung

$$r^2 = \frac{4abcd(8abcd - \Sigma a \cdot \Sigma abc)}{(\Sigma a \cdot \Sigma abc - 4abcd)^2}.$$

Somit ist

$$r^2 + |m|^2 = 2 \left[\frac{4abcd}{\Sigma a \cdot \Sigma abc - 4abcd} \right]^2$$

und

$$r^2 - |m|^2 = -2 \cdot \frac{4abcd}{\Sigma a \cdot \Sigma abc - 4abcd},$$

also ¹⁸⁾

$$(r^2 - |m|^2)^2 = 2\rho^2(r^2 + |m|^2).$$

Daraus folgt der bekannte Schließungssatz:

Besteht zwischen den Halbmessern r und ρ zweier Kreise und ihrem Mittelpunktabstand $|m|$ die soeben hergeleitete Beziehung, dann gibt es ∞^1 bizentrische Vierecke, die den Kreis des Halbmessers ρ berühren und im Kreis des Halbmessers r liegen; die Verbindungssehnen ihrer Berührungspunkte im Inkreis schneiden sich dortselbst stets im nämlichen Punkt s , und zwar unter rechtem Winkel.

7. VOM FLÄCHENINHALT.

(7, 1) Um den Flächeninhalt Δ des Dreiecks zu bestimmen, dessen Seiten den Einheitskreis in den Punkten a, b, c berühren, berechnen wir zunächst das gerichtete Längenmaß der Dreiecksseiten (vgl. Abb. 14): Wir bilden nämlich

$$\frac{2ab}{a+b} - \frac{2ac}{a+c} = \frac{2a^2(b-c)}{(a+b)(a+c)}.$$

¹⁸⁾ N. FUSS, *Nova Acta Petrop.* 13, für 1795/96, ausgeg. 1802, 166.

Diese gerichtete Strecke hat den absoluten Betrag

$$\frac{2a(b-c)\sqrt{-1}}{(a+b)(a+c)};$$

also das Dreieck die Fläche

$$\Delta = \frac{(b-c)(c-a)(a-b)}{(b+c)(c+a)(a+b)}\sqrt{-1}.$$

Auch dieser Ausdruck ist mit einem Vorzeichen behaftet und abhängig vom Umlaufssinn, der sich aus der gewählten Reihenfolge der Ecken ergibt. Sind die beiden Bestandteile der komplexen Einheitsvektoren a, b, c rational, dann sind auch die Seitenlängen und die Fläche des Dreiecks rational; wir haben also ein heronisches Dreieck vor uns.

(7, 2) Als *Sehndreieck* wird das Dreieck dann heronisch, wenn wir ihm die Ecken a^2, b^2, c^2 geben wie am Ende von (2, 2). Jetzt haben die Seiten gemäß (5, 1) die gerichteten Längenmaße

$$\frac{b^2 - c^2}{bc}\sqrt{-1} \text{ usw. ;}$$

also ist die halbe Seitensumme

$$\frac{(b-c)(c-a)(a-b)\sqrt{-1}}{2abc}.$$

Unter Mitverwendung der Formel für ρ aus (5, 2) erhält die Dreiecksfläche nunmehr die Form

$$\Delta = \frac{(b^2 - c^2)(c^2 - a^2)(a^2 - b^2)}{4a^2 b^2 c^2 \sqrt{-1}}.$$

(7, 3) Die Dreiecksformel dient zur Bestimmung des Flächeninhaltes F eines Sehnenvierecks, dem wir die Ecken a^2, b^2, c^2, d^2 geben. Indem wir den Umlaufsinn der Teildreiecke (a^2, b^2, c^2) und (a^2, c^2, d^2) beachten, erhalten wir als Fläche

$$\begin{aligned} F &= \frac{(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)(c^2 - a^2)}{4a^2 b^2 c^2 \sqrt{-1}} + \frac{(a^2 - c^2)(c^2 - d^2)(d^2 - a^2)}{4a^2 c^2 d^2 \sqrt{-1}} = \\ &= - \frac{(a^2 - c^2)(b^2 - d^2)(a^2 c^2 - b^2 d^2)}{4a^2 b^2 c^2 d^2 \sqrt{-1}}. \end{aligned}$$

Die Vierecksseiten müssen so orientiert werden:

$$\frac{a^2 - b^2}{ab} \sqrt{-1}; \quad \frac{b^2 - c^2}{bc} \sqrt{-1}; \quad \frac{c^2 - d^2}{cd} \sqrt{-1}; \quad \frac{a^2 - d^2}{ad} \sqrt{-1}$$

Dann erhalten wir der Reihe nach als Halbsumme der Seiten, vermindert um je eine der Seiten:

$$\frac{(ac - bd)(a + c)(b - d)}{-2abcd \sqrt{-1}}, \quad \frac{(ac + bd)(a + c)(b + d)}{-2abcd \sqrt{-1}},$$

$$\frac{(ac - bd)(a - c)(b + d)}{-2abcd \sqrt{-1}}, \quad \frac{(ac + bd)(a - c)(b - d)}{2abcd \sqrt{-1}}.$$

Wir kommen vom ersten (direkt berechneten) Ausdruck zum zweiten, indem wir b durch $-b$ ersetzen, von diesem zum nächsten, indem wir c durch $-c$ ersetzen, und schliesslich von diesem zum letzten, indem wir d durch $-d$ ersetzen. Nach Multiplikation der letzten vier Ausdrücke erhalten wir das Quadrat von F ; damit ist die bekannte Inhaltsformel für das Sehnenviereck gefunden¹⁹⁾.

(7, 4) Der Flächeninhalt des Sehnendreiecks (u, ϱ, ω) im Einheitskreis kann auch in der Form

$$\frac{1}{4u\varrho\omega \sqrt{-1}} \begin{vmatrix} u^2 & 1 & u \\ \varrho^2 & 1 & \varrho \\ \omega^2 & 1 & \omega \end{vmatrix} = \frac{1}{4\sqrt{-1}} \begin{vmatrix} u & \bar{u} & 1 \\ \varrho & \bar{\varrho} & 1 \\ \omega & \bar{\omega} & 1 \end{vmatrix}$$

geschrieben werden. Diese Formel bleibt auch dann noch richtig, wenn u, ϱ, ω drei beliebige Punkte sind, die *nicht* mehr auf dem Umfang des Einheitskreises liegen. Wir verwenden sie zum Beweis des PASCALSchen Lehrsatzes²⁰⁾:

Die Gegenseiten eines Sehnensechsecks im Kreis schneiden sich in den Punkten einer Geraden (Abb. 16).

¹⁹⁾ Die Flächeninhaltsformel tritt erstmals bei den Indern auf, dann unter deren Einfluß bei den Arabern. Im Abendland findet sie sich unabhängig von diesen Vorgängern in der von W. SNELL besorgten und mit dessen Zusätzen ausgestatteten lateinischen Ausgabe von Ludolf VAN CEULEN, *De arithmetische en geometrische Fundamenten*, Leiden 1615, 21619. Vgl. auch J. TROPFKE, *Geschichte der Elementarmathematik*, IV³, Berlin 1940, 150/68.

²⁰⁾ Der Satz erscheint bereits in *Essay pour les coniques* von 1640 (Vorform), dann in der heutigen Fassung in den 1654 abgeschlossenen und auf Grund eines LEIBNIZschen Gutachtens 1676 zum Druck beförderten *Conica*, die beim Setzer zu Verlust gegangen und nicht an die Öffentlichkeit gekommen sind. Vgl. ferner TROPFKE¹⁹⁾, 231/32.

Die Ecken des Sehnensechsecks seien a, b, c, d, e, f ; die Schnittpunkte der Gegenseiten seien

$$u = (b, c) \times (e, f); \quad v = (c, d) \times (f, a); \quad w = (d, e) \times (a, b).$$

Die Gleichungen der Seiten (b, c) bzw. (e, f) sind

$$z + bc\bar{z} = b + c \text{ bzw. } z + ef\bar{z} = e + f.$$

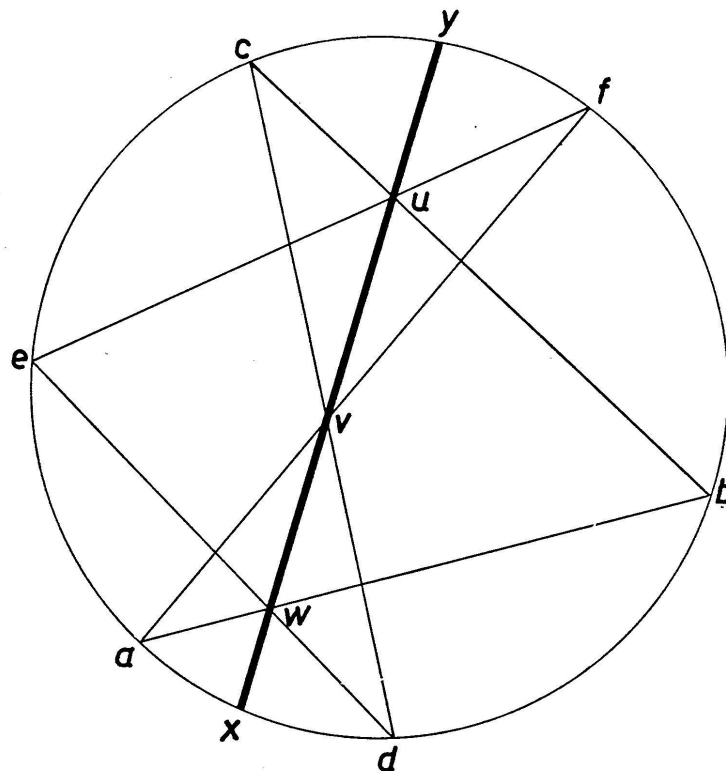


Abb. 16.

Pascalscher Lehrsatz.

Folglich ist ihr Schnittpunkt u gekennzeichnet durch

$$u(bc - ef) = bc(e + f) - ef(b + c); \quad \bar{u}(bc - ef) = (b + c) - (e + f).$$

Also ist die Fläche des Dreiecks (u, v, w) proportional zu

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} bc(e + f) - ef(b + c), & (b + c) - (e + f), & bc - ef \\ cd(f + a) - fa(c + d), & (c + d) - (f + a), & cd - fa \\ de(a + b) - ab(d + e), & (d + e) - (a + b), & de - ab \end{vmatrix} = \\ & = \begin{vmatrix} be, cf, da \\ 1 & 1 & 1 \\ b & f & d \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} (c - f) & (b - e) & 0 \\ 0 & -(a - d) & (c - f) \\ -(a - d) & 0 & -(b - e) \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Die zweite Determinante dieser Produktdarstellung verschwindet identisch; also hat das Dreieck (u, v, w) die Fläche *Null*. Somit liegen die Punkte u, v, w wirklich in einer Geraden, wie behauptet.

Indem wir diese Kreisfigur aus einem Punkt, der nicht in der Kreisebene liegt, auf eine zur Kreisebene nicht parallele Ebene projizieren, erhalten wir daraus den allgemeinen PASCALschen Lehrsatz für Kegelschnitte.

(7, 5) Fassen wir etwa die Punkte e, c, a bzw. b, f, d als zusammengehörige Elemente einer Projektivität auf dem Kreisumfang auf, dann ist die PASCALSche Gerade (u, v, w) der Abb. 16 die Achse dieser Projektivität; ihre Schnittpunkte x, y mit dem Einheitskreis sind die Doppelemente der Projektivität.

Diese Eigenschaft verwenden wir z.B. zur Lösung der sog. OTTOJANOSchen Aufgabe ²¹⁾:

Gegeben sind ein Kreis und drei nicht auf seinem Umfang gelegene Punkte. Ein Sehnendreieck durch diese Punkte zu bestimmen.

Der Kreis sei der Einheitskreis, die von einander verschiedenen Punkte seien p, q, r , die gesuchten Ecken des Dreiecks seien x, y, z . Es geht also um die Auflösung der drei Gleichungen

$$p + yz\bar{p} = y + z, \quad q + zx\bar{q} = z + x, \quad r + xy\bar{r} = x + y.$$

Vermöge der beiden ersten Gleichungen lässt sich x und y als linear-gebrochene Funktion von z ausdrücken; durch Einsetzen in die dritte Gleichung erhalten wir also eine quadratische Gleichung in z , die nach Division mit z auf die Form $z + m\bar{z} = n$ gebracht werden kann und also eine Gerade darstellt. Deren Schnittpunkte mit dem Einheitskreis liefern die beiden gesuchten Werte z_1 und z_2 .

Im vorliegenden Fall konstruieren wir am zweckmäßigsten drei zusammengehörige Punktepaare der durch die Anordnung

²¹⁾ Das Problem stammt (für drei Punkte, die in einer Geraden liegen) von APOLLONIOS aus den verlorenen *Tactiones*, über die wir Näheres aus PAPPUS, *Collectiones*, VII, prop. 117 wissen. Das allgemeinere Problem wurde von G. CRAMER gestellt, dessen Schüler G. F. M. M. SALVEMINI DE CASTILLON seit 1742 an der Lösung arbeitete und 1776 eine elementargeometrische veröffentlichte. Das Problem für n -Ecke wurde von dem 16-jährigen A. GIORDANO aus Ottojano im Anschluß an PAPPUS gelöst. Vgl. M. BRÜCKNER, *Das Ottojanosche Problem*, Programm, Zwickau 1892 und TROPFKE ¹⁹⁾, 125.

z_1, p, y, r, x, q, z_2 auf dem Kreisumfang bestimmten Projektivität. Die zusammengehörigen Punkte z_1 und z_2 bezeichnen wir bzw. mit e, c, a und b, f, d . Die Achse dieser Projektivität ist die oben erwähnte Gerade. Die Ausführung ist in Abb. 17 nur angedeutet, weil wohlbekannt.

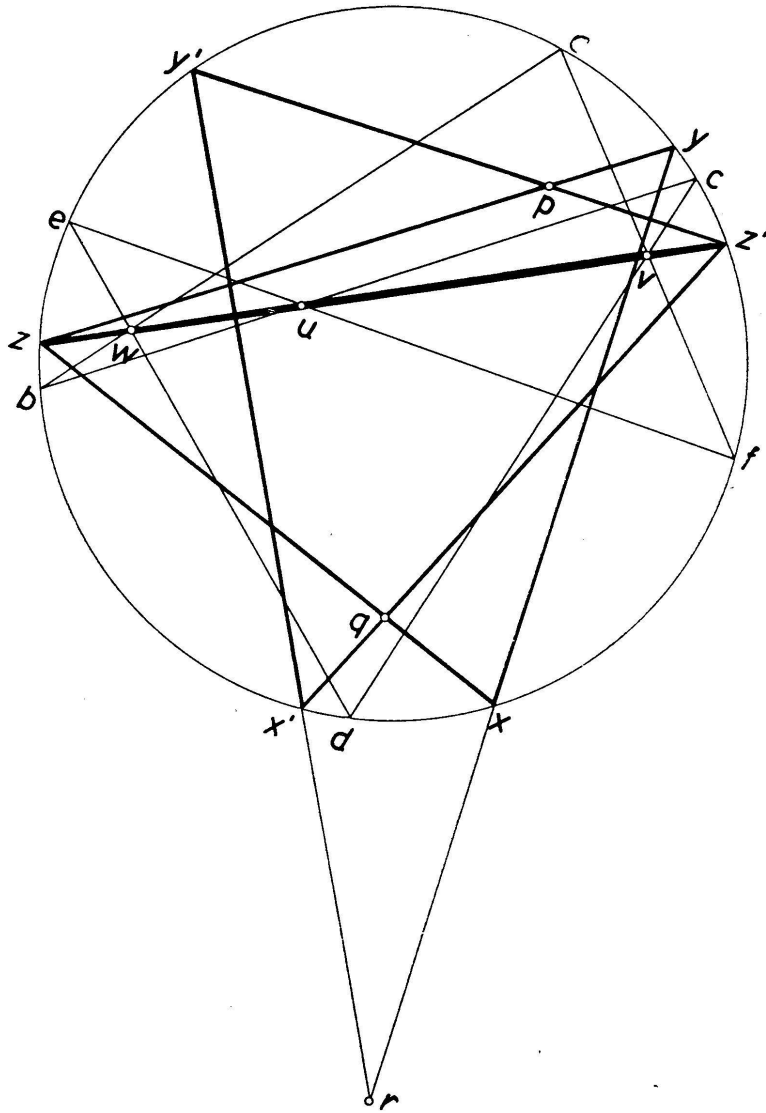


Abb. 17.

Ottojanos Problem.

Der rechnerische Ansatz zeigt, daß das Problem im Kreis vom Dreieck auf ein n -Eck übertragen werden kann und wiederum auf eine quadratische Gleichung führt. Durch passende Projektion läßt es sich allgemein für Kegelschnitte aussprechen und behandeln.

* * *

Dies waren einige Proben, an denen gezeigt werden sollte, wie sich der zu Anfang erwähnte Gedanke, komplexe Zahlen im Zusammenhang mit dem Einheitskreis zu verwenden, nutzbringend verwenden läßt. Es gibt sehr viele weitere einfache Anwendungen; da es nur um die Fixierung der Gedanken geht, soll nicht weiter auf sie eingegangen werden.

SUR LES NOMBRES PREMIERS DE LA FORME $n^n + 1$

par W. SIERPIŃSKI (Varsovie).

(Reçu le 11 décembre 1957.)

Le but de cette Note est de démontrer le théorème suivant:

Parmi les nombres ayant au plus trois cent milles chiffres (en système décimal) il n'y en a que trois, 2, 5 et 257 qui sont des nombres premiers de la forme $n^n + 1$, où n est un nombre naturel.

DÉMONSTRATION. — Le nombre $1^1 + 1 = 2$ est premier. Soit maintenant n un nombre naturel > 1 et supposons que le nombre $n^n + 1$ est premier. Si n avait un diviseur premier impair p , on aurait $n = kp$, où k est un nombre naturel et le nombre $n^n + 1 = (n^k)^p + 1$ serait divisible par le nombre naturel $n^k + 1$ qui est > 1 et $< n^n + 1$ (puisque $k < kp = n$), ce qui est impossible. Donc n n'a aucun diviseur premier impair et, comme $n > 1$, on a $n = 2^s$, où s est un nombre naturel. Si s avait un diviseur premier q impair, on aurait $s = kq$, où k est un nombre naturel, et le nombre $n^n + 1 = 2^{sn} + 1 = (2^{kn})^q + 1$ serait divisible par le nombre naturel $2^{kn} + 1$ qui est > 1 et $< n^n + 1$ (puisque $2^{kn} < 2^{knq} = n^n$), ce qui est impossible. Le nombre s n'a donc aucun diviseur premier impair, donc $s = 2^m$, où m est un entier ≥ 0 .