

# ZUR ELEMENTAREN DREIECKSGEOMETRIE IN DER KOMPLEXEN EBENE

Autor(en): **Hofmann, Jos. E.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **4 (1958)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.04.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-34635>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# ZUR ELEMENTAREN DREIECKSGEOMETRIE IN DER KOMPLEXEN EBENE

von Jos. E. HOFMANN (Ichenhausen)

*(Reçu le 17 juillet 1958.)*

Einige Fragen der elementaren Dreiecksgeometrie lassen sich besonders einfach in Vektorform behandeln, wenn der Umkreismittelpunkt des Dreiecks als Bezugspunkt verwendet wird. Machen wir den Umkreishalbmesser zur Einheit, dann sind die Ortsvektoren  $a$ ,  $b$ ,  $c$  der gleichbenannten Ecken Einheitsvektoren, die wir zweckmäßig als komplexe Zahlen schreiben. Wird ein Punkt auf dem Einheitskreis durch die komplexe Zahl  $z$  dargestellt, dann wird sein Spiegelpunkt  $\bar{z}$  an der reellen Achse durch  $\frac{1}{z}$  wiedergegeben. Die nachfolgenden Beispiele sollen zeigen, wie sich die vektorielle Auffassung und die Beziehung  $\bar{z} = \frac{1}{z}$  vereinfachend und nutzbringend verwenden lassen.

## 1. VOM HÖHENSCHNITTPUNKT, VOM FEUERBACH-KREIS UND VERWANDTEN PROBLEMEN.

(1, 1) Es seien  $a$ ,  $b$ ,  $c$  die Ortsvektoren der Ecken eines Sehnendreiecks im Einheitskreis (Abb. 1). Dann ist  $(a + b)$  der Spiegelpunkt des Umkreismittelpunktes  $O$  an der Sehne  $(a, b)$ ; also steht der Ortsvektor  $(a + b)$  auf der Sehne senkrecht. Ergänzen wir nunmehr  $(a + b)$  und  $c$  hinsichtlich  $O$  zum Parallelogramm, dann ist

$$a + b + c = d$$

der Ortsvektor, der auf der Diagonalen dieses Parallelogramms aus  $O$  liegt. Folglich fällt die Gerade  $(c, d)$  auf die Dreieckshöhe

aus  $c$  auf die Gegenseite  $(a, b)$ . Da die Vektoraddition kommutativ und assoziativ ist, befindet sich  $d$  auch auf den Höhen aus  $a$  auf  $(b, c)$  und aus  $b$  auf  $(c, a)$ . Damit ist gezeigt, daß sich die drei Höhen des Dreiecks genau in *einem* Punkt schneiden, nämlich im *Höhenschnittpunkt*  $d = a + b + c$ . Sehen wir für den Augenblick vom Umkreis ab, dann sind die vier Punkte  $a, b, c, d$  völlig gleichberechtigt; jeder von ihnen ist Höhenschnittpunkt des aus den drei anderen Punkten bestimmten Dreiecks. Wir reden deshalb zweckmäßig von *vier orthogonal verbundenen Punkten*.

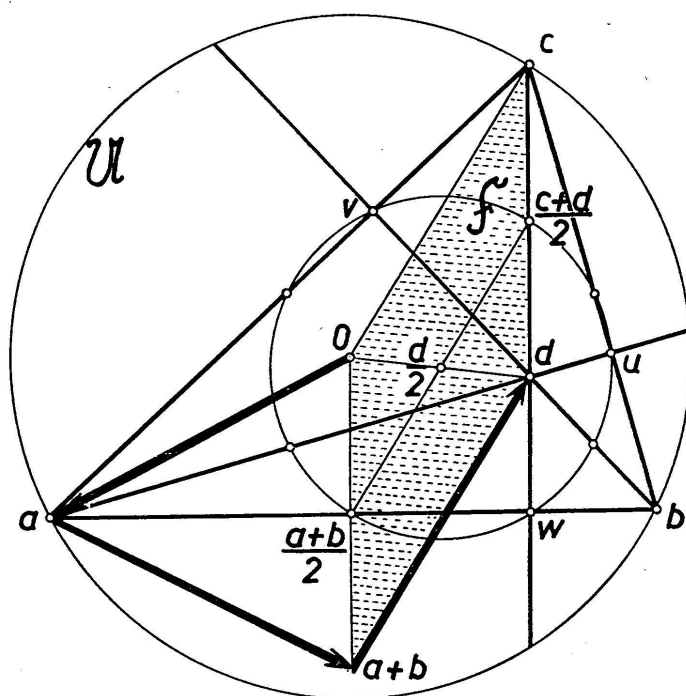


Abb. 1.

Umkreis, Höhenschnittpunkt und Feuerbach-Kreis.

(1, 2) Nun ist  $\frac{a+b}{2}$  Mittelpunkt der Sehne  $(a, b)$  und des Ortsvektors  $(a + b)$ . Die Parallele durch  $\frac{a+b}{2}$  zum Ortsvektor  $c$  trifft auf den Höhenabschnitt  $(c, d)$  in dessen Mittelpunkt  $\frac{c+d}{2}$ , und  $\frac{d}{2}$  ist der Mittelpunkt des durch  $(O, a + b, d, c)$  bestimmten Parallelogramms. Folglich geht der Kreis des Halbmessers  $\frac{1}{2}$  um  $\frac{d}{2}$ , den Mittelpunkt des Ortsvektors  $d$ , durch die Seitenmittelpunkte  $\frac{b+c}{2}, \frac{c+a}{2}, \frac{a+b}{2}$ , durch die Mittelpunkte  $\frac{a+d}{2}, \frac{b+d}{2}$ ,

$\frac{c+d}{2}$  der „oberen Höhenabschnitte“ und durch die Höhenfußpunkte  $u, v, w$  des Dreiecks, ist also dessen FEUERBACH-Kreis <sup>1)</sup>. Etwas anders ausgedrückt:

*Sind die vier Punkte  $a, b, c, d$  orthogonal verbunden, dann haben die vier aus je dreien dieser Punkte bestimmten Dreiecke den nämlichen FEUERBACH-Kreis. Er geht einerseits durch die sechs Seitenmitten des aus diesen Punkten bestimmten vollständigen Vierecks, andererseits durch dessen Nebenecken.*

(1, 3) Fügen wir zu den Ecken  $a, b, c, d$  der Abb. 1 noch die Punkte  $(b+c), (c+a), (a+b)$  hinzu (Abb. 2), dann liegen diese Punkte auf dem Einheitskreis um  $d$ . Sie sind die Ecken eines neuen Dreiecks, das zum ursprünglichen hinsichtlich  $\frac{d}{2}$  symmetrisch liegt und  $O$  zum Höhenschnittpunkt hat. Auch die

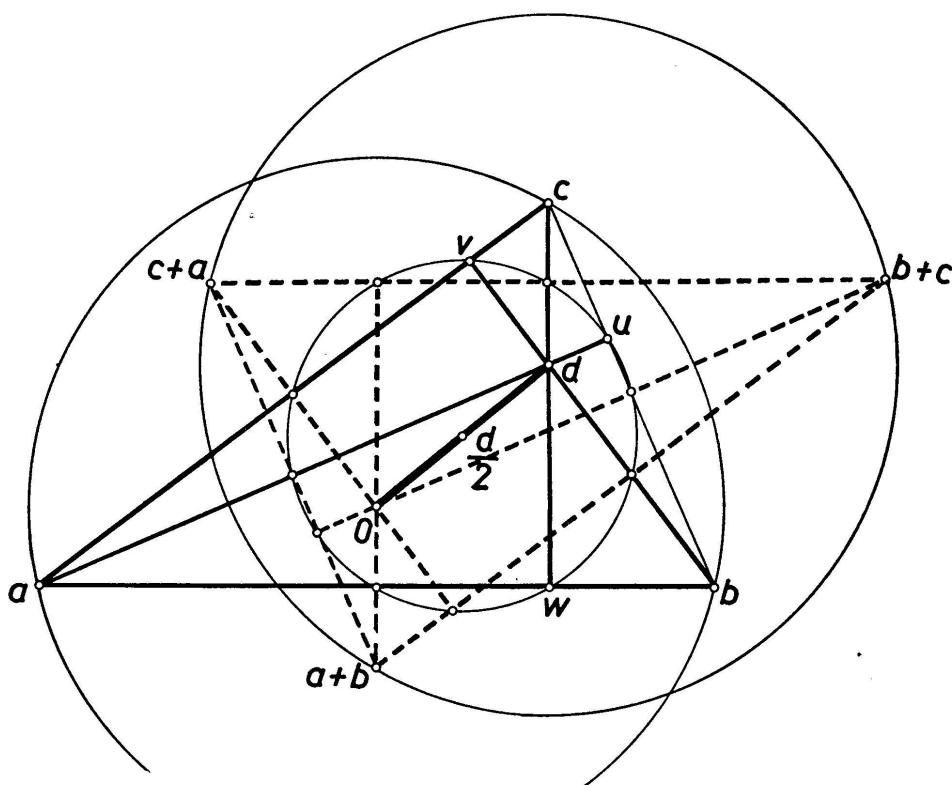


Abb. 2.

Ein Paar zugeordneter Dreiecke.

<sup>1)</sup> K. W. FEUERBACH, *Eigenschaften einiger merkwürdiger Punkte des geradlinigen Dreiecks und mehrerer durch sie bestimmter Linien und Figuren*. Nürnberg 1822. Zur Literatur vgl. J. S. MACKAY, *Proceedings Edinburgh Math. Soc.* 11, 1893, 19 ff. und J. LANGE, *Geschichte des Feuerbachschen Kreises*, Programm Berlin 1894; ferner M. SIMON, *Über die Entwicklung der Elementargeometrie im XIX. Jh.*, Jahresbericht d. Deutschen Math.-Vereinig., Ergänzungsband I, Leipzig 1906, 124/30 und M. ZACHARIAS in der *Encyklopädie der math. Wiss.*, III AB 9, Leipzig 1914.



Punkte  $O$ ,  $(b + c)$ ,  $(c + a)$ ,  $(a + b)$  sind orthogonal verbunden; die Seitenmitten des Dreiecks  $(a, b, c)$  sind die Mittelpunkte der oberen Höhenabschnitte des Dreiecks  $(b + c, c + a, a + b)$  und umgekehrt. Wir haben also acht Dreiecke mit dem nämlichen FEUERBACH-Kreis und zwölf auf diesem liegende Punkte. Die Zentrale  $(O, d)$  der beiden kongruenten Kreise ist die EULERSche Gerade <sup>2)</sup> der beiden Dreiecke. Auf ihr liegen auch die Schwerpunkte  $\frac{d}{3}$  des ursprünglichen und  $\frac{2d}{3}$  des zugeordneten Dreiecks.

(1, 4) Sind zwei der fünf Punkte  $O$ ,  $\frac{d}{3}$ ,  $\frac{d}{2}$ ,  $\frac{2d}{3}$ ,  $d$  bekannt, dann sind die anderen mitbestimmt. Kennen wir außerdem noch den Halbmesser des FEUERBACH-Kreises oder eines der beiden Umkreise, dann sind uns diese drei Kreise nebst ihren Mittelpunkten bekannt. Es gibt unter einer nachher zu besprechenden Einschränkung  $\infty^1$  Dreiecke  $(a, b, c)$ , die dem Kreis um  $O$  einbeschrieben sind und  $d$  zum Höhenschnittpunkt haben. Wählen wir z.B. die Ecke  $c$  auf dem Kreis um  $O$ , dann ist die Gegenecke  $(a + b)$  auf dem Kreis um  $d$  als Spiegelbild an  $\frac{d}{2}$  bestimmt. Die Parallelen  $(c, d)$  bzw.  $(O, a + b)$  treffen den FEUERBACH-Kreis in den Ecken eines Rechtecks, dessen andere Seiten die anderen Ecken  $a, b$  bzw.  $(b + c), (c + a)$  der zugeordneten Dreiecke tragen.

Ist Dreieck  $(a, b, c)$  *spitzwinklig*, dann liegt  $d$  *innerhalb* des Umkreises um  $O$ . Ist das Dreieck *rechtwinklig*, dann befindet sich  $d$  *auf* dem Umkreis. In diesem Fall berühren sich der FEUERBACH-Kreis und der Umkreis in  $d$ , und der Ortsvektor  $d$  ist der Durchmesser des FEUERBACH-Kreises. Ist Dreieck  $(a, b, c)$  *stumpfwinklig*, dann liegt  $d$  *außerhalb* des Kreises um  $O$ , jedoch so, daß der FEUERBACH-Kreis den Umkreis *schneidet*. Abb. 3 zeigt, wie die Verhältnisse nunmehr liegen.

(1, 5) Weil die aus orthogonal verbundenen Punkten  $a, b, c, d$  entstehenden Dreiecke  $(b, c, d)$ ,  $(c, a, d)$ ,  $(a, b, d)$  und  $(a, b, c)$  den nämlichen FEUERBACH-Kreis haben, sind ihre Umkreise *kongruent*. Die Mittelpunkte dieser Umkreise sind die zuge-

<sup>2)</sup> L. EULER, *Solutio facilis problematum quorundam geometricorum difficillimorum*, Novi commentarii Ac. sc. Petrop., 11 (1765), 1767, 103/23, insbes. 114; *Opera omnia*, XXVI, ed. Andr. Speiser, Zürich 1953, 139/57, insbesondere 149. Die Abhandlung wurde der Petersburger Akademie am 21. XII. 1763 alten Stiles vorgelegt.



Soll das orthogonal verbundene Quadrupel aus den Längen der Pfeile bestimmt werden, dann entsteht eine kubische Gleichung für den Durchmesser des Kreises, in den der Streckenzug eingepaßt werden kann <sup>4)</sup>. Diese Gleichung hat drei reelle Lösungen; die Anordnung der (in ihrer Reihenfolge vertauschbaren) Pfeile in diesen Kreisen wird genau durch die drei Arten der Abb. 4 veranschaulicht <sup>5)</sup>.

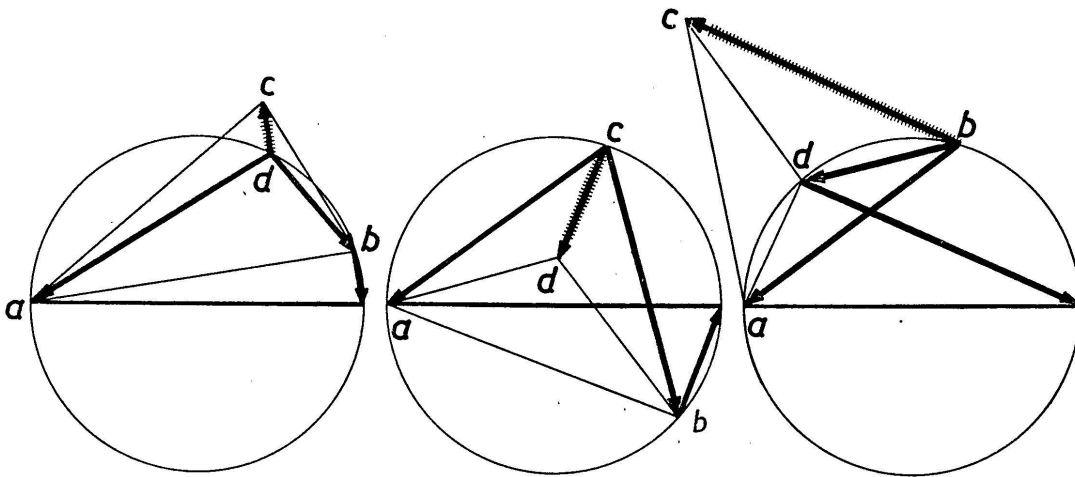


Abb. 4.  
Der Holzsche Satz.

## 2. VON DER BOGENGLEICHHEIT.

(2, 1) Sind  $(a, b)$  und  $(c, d)$  zwei Paralleelsehnen im Einheitskreis (Abb. 5), dann sind die Kreisbögen zwischen den Parallelen gleich groß. Prägen wir ihnen den positiven Gegenuhrzeigersinn

<sup>4)</sup> Das Einpassungsproblem wird heute allgemein nach I. NEWTON, *Arithmetica universalis*, Kap. XIII, 8./10. Vorlesung von 1675/76, ed. W. WHISTON, Cambridge 1707, 97/113 genannt, so z.B. bei H. DÖRRIE, *Mathematische Miniaturen*, Breslau 1943, 31. Es stammt jedoch nicht von NEWTON, sondern von Fr. van SCHOOTEN, *De organica conicarum sectionum in plano descriptione tractatus...*, cui subnexa est appendix de cubicarum aequationum resolutione, Leiden 1646, 102/08 und 111/17, in verbesserter Form wiederabgedruckt in R. DESCARTES, *Geometrie* ed. Fr. van Schooten, I, Amsterdam 1659, 354/59 und 361/67. Dies wird die Vorlage für Newton gewesen sein, der diese Ausgabe der *Geometria* besaß.

Setzen wir z.B.  $|b, c| = u$ ,  $|c, a| = v$ ,  $|a, b| = w$ , dann heißt die (bereits bei Schooten auftretende) kubische Gleichung

$$x^3 = (u^2 + v^2 + w^2)x + 2uvw.$$

<sup>5)</sup> Diese drei Fälle treten auch bei SCHOOTEN <sup>4)</sup> und NEWTON <sup>4)</sup> auf. Auch die elegante kinematische Lösung bei BIEBERBACH <sup>3)</sup>, 115/16 vermittelt eines transparenten Blattes und des Stechzirkels erweist sich bei genauerem Zusehen als Variante der Lösung von SCHOOTEN. Dieser arbeitet im Anschluß an Fr. VIÈTE, *Supplementum geometriae*, Tours 1593, Wiederdruck in den *Opera*, ed. Fr. van Schooten, Leiden 1646, vermittelt einer Einschiebung, die mit der Winkeldreiteilung zusammenhängt.

auf, dann ist gemäß den in der Abbildung gewählten Bezeichnungen  $\frac{c}{b} = \frac{a}{d}$ ; also

$$ab = cd.$$

Fällen wir z.B. das Lot aus  $c$  auf  $(a, b)$ , dann trifft es in  $-d = -\frac{ab}{c}$  auf dem Kreis ein.

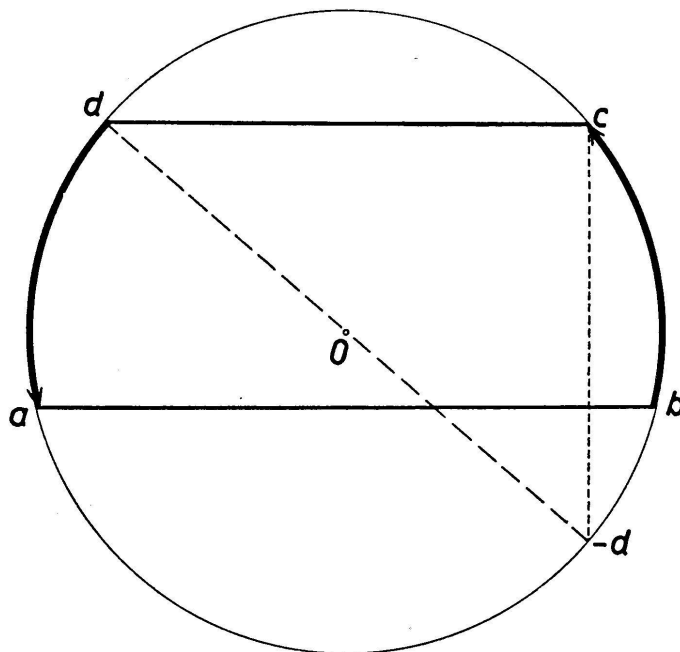


Abb. 5.  
Bogengleichheit.

(2, 2) Haben wir nunmehr die Punkte  $a, b, c$  auf dem Umfang des Einheitskreises (Abb. 6), dann wird der Kreis von den Höhen des Dreiecks  $(a, b, c)$  bzw. in den Punkten  $p = -\frac{bc}{a}$ ,  $q = -\frac{ca}{b}$ ,  $r = -\frac{ab}{c}$  geschnitten. Nun ist aber z.B.  $\frac{c}{p} = -\frac{a}{b} = \frac{q}{c}$ . Daraus folgt, daß der Pfeil  $(r, c)$  die innere Halbierende des Winkels  $(p, r, q)$  ist.

Also sind die Höhen des Sehnendreiecks  $(a, b, c)$ , die inneren Winkelhalbierenden des zugeordneten Gegendreiecks  $(p, q, r)$  und der Höhenschnittpunkt des Ausgangsdreiecks ist zugleich der Inkreismittelpunkt des neuen <sup>6)</sup>.

<sup>6)</sup> Vgl. Ph. NAUDÉ in den *Miscellanea Berolinensia* 5, 1737, 17 bzw. FEUERBACH <sup>1)</sup>, § 24.

Weiterhin ist  $\omega$  (vgl. 1, 2) Mittelpunkt zwischen  $d$  und  $r$ ;  
 also  $\omega = \frac{1}{2} \left( a + b + c - \frac{ab}{c} \right)$  usw. und  $d - \omega = \frac{(a + c)(b + d)}{2c}$   
 usw.

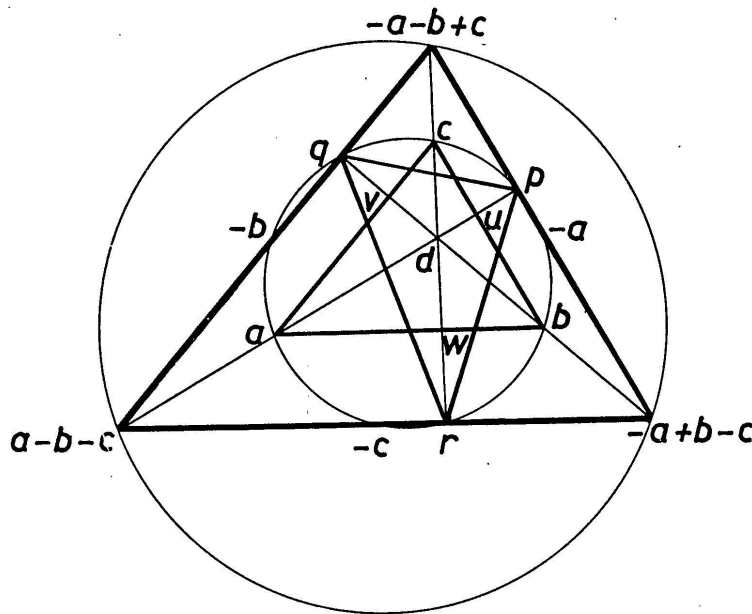


Abb. 6.

Dreieck und Gegendreieck.

(2, 3) Jetzt ergänzen wir noch die Gegenpunkte  $(-a)$ ,  $(-b)$ ,  $(-c)$  zu  $a, b, c$  bez. O. Dann ist z.B. die Gerade  $(-c, r)$  die äußere Halbierende des Winkels  $(p, r, q)$ . Fügen wir auch die anderen äußeren Winkelhalbierenden  $(-a, p)$ ,  $(-b, q)$  des Dreiecks  $(p, q, r)$  hinzu, dann entsteht ein Dreieck, das zum Dreieck  $(a, b, c)$  aus  $d$  ähnlich und im Maßstab 2:1 vergrößert ist. Jetzt tritt z.B. an Stelle von  $c$  die Ecke  $(-a - b + c)$ ; denn  $c$  ist Mittelpunkt zwischen  $(-a - b + c)$  und  $d$ . Der Ausgangskreis ist der FEUERBACH-Kreis dieses vergrößerten Dreiecks, dessen Umkreis den Halbmesser 2 hat. Damit sind wir in etwas anderer Form zu den früheren Ergebnissen zurückgekommen.

Wir können die Ergebnisse auch bruchfrei ausdrücken, indem wir nämlich  $p$  durch  $p^2$ ,  $q$  durch  $q^2$  und  $r$  durch  $r^2$  ersetzen. Dann müssen wir  $a$  durch  $-qr$ ,  $b$  durch  $-rp$  und  $c$  durch  $-pq$  ersetzen und erhalten den Inkreismittelpunkt in der Form  $-(qr + rp + pq)$ , die Ankreismittelpunkte in der Form  $(-qr + rp + pq)$ ,  $(qr - rp + pq)$ ,  $(qr + rp - pq)$ .



Die Punkte  $u, v, w$  liegen in einer und der nämlichen Geraden, der WALLACE-Geraden des Dreiecks  $(a, b, c)$  hinsichtlich des Punktes  $d$  auf dem Umkreis des Dreiecks.

Z.B. ist  $(a, \omega, \nu, d)$  ein Sehnenviereck, jedoch nicht im Einheitskreis. Folglich ist

$$\sphericalangle (d, a, \nu) = \sphericalangle (d, \omega, \nu) .$$

Die Parallele durch  $c$  zu  $(\nu, \omega)$  schneidet die verlängerte  $(d, \omega)$  unter dem nämlichen Winkel. Dieser Schnittpunkt liegt auf dem Einheitskreis. Da aber  $(a, b)$  und  $(d, \omega)$  auf einander senkrecht stehen, wird der Schnittpunkt durch  $\left(-\frac{ab}{d}\right)$  dargestellt. Das Richtungsmaß der Geraden  $(\nu, \omega)$  ist also  $\left(-\frac{abc}{d}\right)$ . Dieser Ausdruck ist in  $a, b, c$  symmetrisch. Also haben die drei Geraden  $(\nu, \omega), (\omega, u), (u, \nu)$  das nämliche Richtungsmaß; folglich fallen sie zusammen.

(3, 2) Wir geben zwei Umfangspunkte  $a, b$  auf dem Einheitskreis und einen Punkt  $z$ , der nicht auf der Geraden  $(a, b)$  liegt (Abb. 8). Dann ergänzen wir  $a, O, b$  durch  $(a + b)$  zur Raute und spiegeln  $z$  an der Rautendiagonale  $(O, a + b)$  in  $s$ . Indem wir die Einheitsvektoren  $\frac{s}{|s|}$  und  $\frac{z}{|z|}$  bilden, erhalten wir die Schnittpunkte der Ortsvektoren  $s$  und  $z$  (oder ihrer Verlängerungen über die Spitze hinaus) mit dem Einheitskreis. Die Verbindungsstrecke dieser Einheitsvektoren ist parallel zur Sehne  $(a, b)$ ; also ist  $\frac{s}{|s|} \frac{z}{|z|} = ab$ . Nun ist aber  $|s| = |z|$ ; also  $|s| |z| = z \bar{z}$ ; somit

$$s = ab\bar{z} .$$

Jetzt spiegeln wir  $z$  am Sehnenmittelpunkt  $\frac{a+b}{2}$  in  $\sigma = a + b - z$  und  $s$  am nämlichen Punkt in

$$\zeta = a + b - ab\bar{z} .$$

Nun ist  $\zeta$  gleichzeitig Spiegelpunkt von  $z$  an der Sehne  $(a, b)$ . Wenn wir einen Punkt  $z$  auf der Sehne vor uns haben,

dann und nur dann ist  $\zeta = z$ . Folglich ist

$$z + ab\bar{z} = a + b$$

die Gleichung der Geraden  $(a, b)$ . Die linke Seite  $z + ab\bar{z}$  nennen wir den *Richtungsteil*; er ist durch das Richtungsmaß eindeutig bestimmt. Die rechte Seite nennen wir das *konstante Glied*. Es

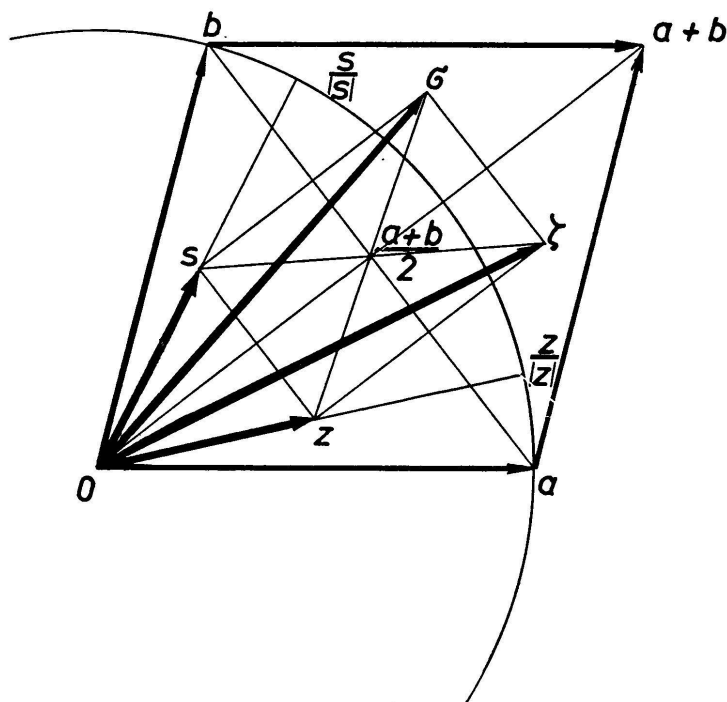


Abb. 8.

Geradengleichung.

wird durch Einsetzen der Endpunkte der Sehnen (oder allgemeiner: eines bekannten Punktes der Geraden) in die Gleichung bestimmt. Das liefert — da wir  $z$  sowohl durch  $a$  wie durch  $b$  ersetzen können — eine Probe.

(3, 3) Nun kehren wir zur WALLACE-Geraden (3, 1) zurück. Der Richtungsteil ihrer Gleichung ist  $z - \frac{abc}{d}\bar{z}$ ; das konstante Glied ergibt sich z.B. durch Einsetzen von  $z = u$ . Wir erhalten nach leichter Umformung

$$z - \frac{abc}{d}\bar{z} = \frac{1}{2}(a + b + c + d) - \frac{abc}{d}(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + \bar{d})$$

Diese Gleichung ist in  $a, b, c$  symmetrisch; deshalb geht die durch sie dargestellte Gerade nicht nur durch  $u$ , sondern auch durch  $v$



und  $\omega$ . Natürlich läßt sich das auch durch Einsetzen nachprüfen. Außerdem liegt auch der Punkt  $t = \frac{1}{2}(a + b + c + d)$  auf der WALLACE-Geraden. Hier ist  $\frac{1}{2}(a + b + c)$  der Mittelpunkt des zum Dreieck  $(a, b, c)$  gehörigen FEUERBACH-Kreises; an ihn ist noch der Vektor  $\frac{d}{2}$  der Länge  $\frac{1}{2}$  angesetzt. Folglich liegt  $t$  auf diesem FEUERBACH-Kreis, aber nicht nur auf ihm, sondern auch auf den FEUERBACH-Kreisen der Dreiecke  $(b, c, d)$ ,  $(c, a, d)$ ,  $(a, b, d)$ .

*Wird in einem Sehnenviereck zu jeder Ecke die WALLACE-Gerade hinsichtlich des Dreiecks der drei anderen Ecken bestimmt, dann gehen die vier so entstehenden Geraden durch einen und den nämlichen Punkt, nämlich durch den gemeinsamen Schnittpunkt der FEUERBACH-Kreise dieser vier Dreiecke*<sup>8)</sup>.

#### 4. WEITERE ANWENDUNGSBEISPIELE.

(4, 1) Wir behaupten:

*Die bez. Parallelen zu den inneren Winkelhalbierenden eines Dreiecks durch dessen Seitenmitten schneiden sich in einem Punkt.*

Wie am Ende von (2, 2) bezeichnen wir die Ecken des Dreiecks im Einheitskreis mit  $p^2, q^2, r^2$ . Folglich sind die Mitten der Gegenbögen zu den Ecken auf dem Einheitskreis ( $-qr$ ), ( $-rp$ ), ( $-pq$ ) zu nennen. Die innere Halbierende des Winkels  $(q^2, p^2, r^2)$  geht durch  $p^2$  und ( $-qr$ ); sie hat also den Richtungs-  
teil  $z - p^2 q r \bar{z}$ . Die Parallele zu dieser Winkelhalbierenden durch den Seitenmittelpunkt  $\frac{1}{2}(q^2 + r^2)$  hat die Gleichung  
 $z - p^2 q r \bar{z} = \frac{1}{2} \left( q^2 + r^2 - p^2 \cdot \frac{r}{q} - p^2 \cdot \frac{q}{r} \right)$ . Entsprechend:

$$z - p q^2 r \bar{z} = \frac{1}{2} \left( p^2 + r^2 - q^2 \cdot \frac{r}{p} - q^2 \cdot \frac{p}{r} \right).$$

Indem wir die mit  $q$  multiplizierte erste Gleichung von der mit  $p$  multiplizierten zweiten subtrahieren und mit  $p - q$  dividieren, erhalten wir

$$z = \frac{1}{2} (p^2 + q^2 + r^2 + qr + rp + pq).$$

<sup>8)</sup> Aufgabe von É. LEMOINE in den *Nouv. annal.* (2). 8, 1867, 47.

Dieser Ausdruck ist in  $p, q, r$  symmetrisch aufgebaut; folglich liegt  $z$  auf allen drei Parallelen zu den Winkelhalbierenden.

Für die Konstruktion spiegeln wir den Inkreismittelpunkt  $i = -(qr + rp + pq)$  am Umkreismittelpunkt  $O$  in  $j = -i$ ; dann liegt  $z$  in der Mitte zwischen  $j$  und dem Höhenschnittpunkt  $d = p^2 + q^2 + r^2$  des Dreiecks. Ähnliche Beziehungen gelten auch im Zusammenspiel mit *äußeren* Winkelhalbierenden.

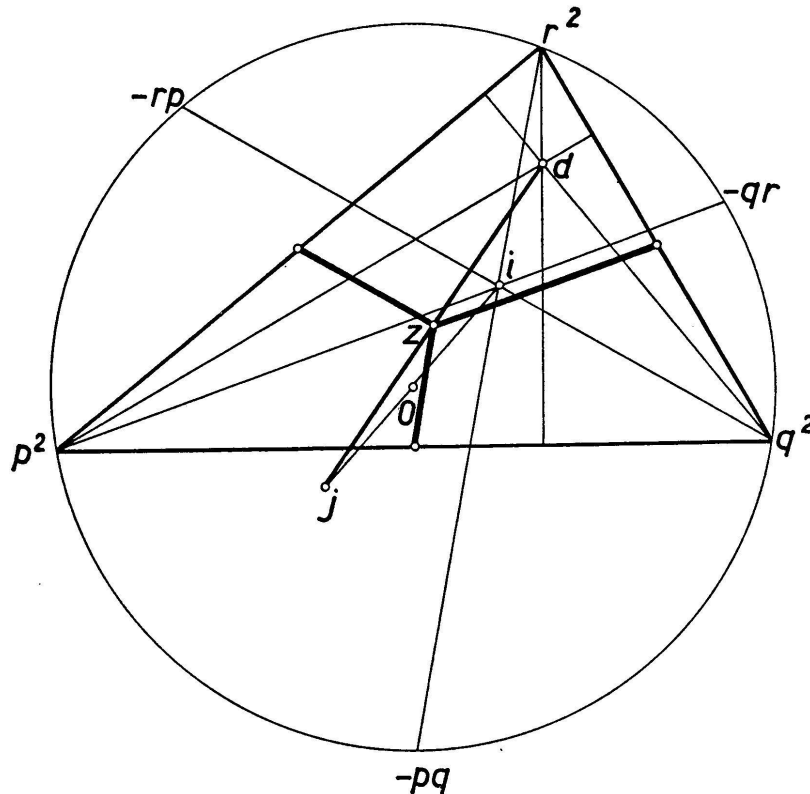


Abb. 9.

Drei Gerade, die durch einen Punkt gehen.

(4, 2) In einer erst seit 1927 wieder in arabischer Bearbeitung zugänglich gewordenen ARCHIMEDischen Abhandlung<sup>9)</sup> findet sich der folgende Satz, der mit dem Additionstheorem der trigonometrischen Funktionen gleichwertig ist:

*Auf dem Einheitskreis befinden sich vier Punkte a, b, c, d dergestalt, daß d die Mitte des Bogens  $\widehat{abc}$  ist. Dann halbiert das*

<sup>9)</sup> C. SCHÖY, *Die trigonometrischen Lehren des persischen Astronomen al-Birûnî...*, ed. J. Ruska/H. Wieleitner, Hannover 1927, 3. Zur Bedeutung der ARCHIMEDischen Prämisse vgl. J. TROPFKE im *Archiv f. Geschichte d. Math., d. Nat. u. d. Technik* 10, 1928, 430/62, insbesondere 433/36.

Lot aus  $d$  auf die längere der Sehnen  $(a, b)$  und  $(b, c)$  die Länge der Sehnensumme  $|a, b| + |b, c|$  (Abb. 10).

Es sei etwa  $|a, b| > |b, c|$ . Weil  $d$  den Bogen  $\widehat{abc}$  halbiert, ist  $c = \frac{d^2}{a}$ . Verlängern wir die Sehne  $(a, b)$  über  $b$  hinaus um die Sehne  $(b, c)$  bis  $z$ , dann ist  $(z, c)$  parallel zur inneren Halbierenden  $(b, -d)$  des Winkels  $(a, b, c)$ . Das Lot aus  $d$  auf  $(a, b)$

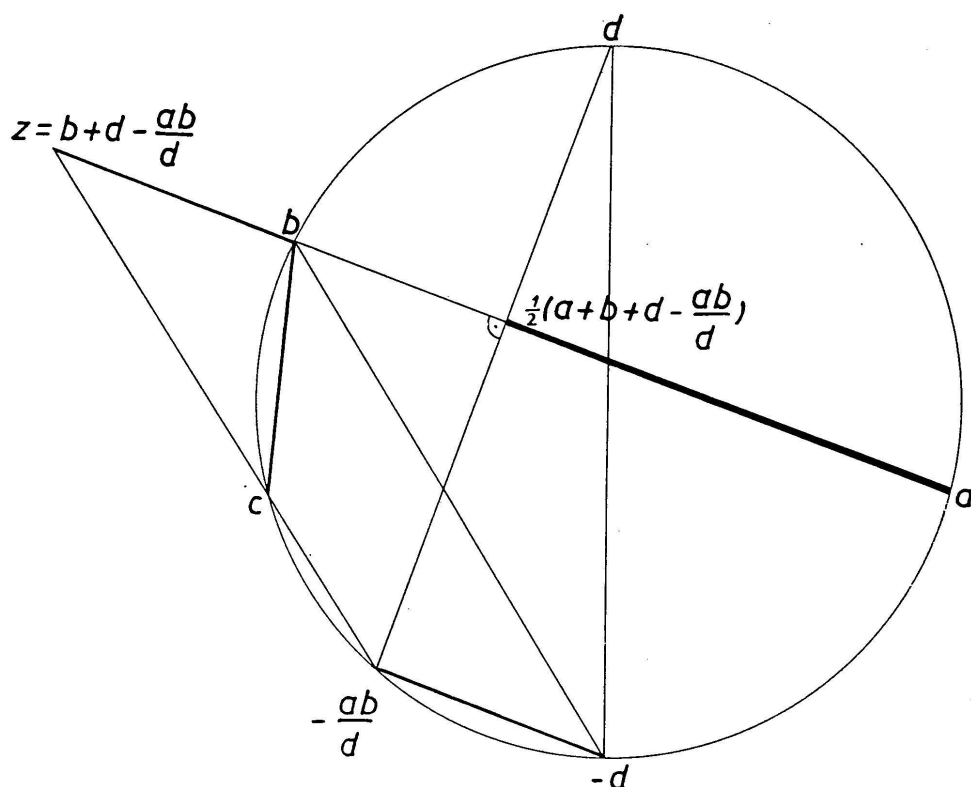


Abb. 10.

Zur Archimedischen Prämisse.

trifft den Kreis nochmals in  $(-\frac{ab}{d})$ . Weil die Sehnen  $(b, c)$  und  $(-d, -\frac{ab}{d})$  zwischen Paralleelsehnen des Kreises liegen, sind sie gleichlang. Weil ferner  $(-\frac{ab}{d}, -d, b, z)$  ein Parallelogramm ist, ist  $z - b = -\frac{ab}{d} + d$ ; also  $z = b + d - \frac{ab}{d}$ . Folglich ist  $\frac{a+z}{2} = \frac{1}{2}(a + b + d - \frac{ab}{d})$  der Mittelpunkt der Strecke  $(a, z) = (a, b) + (b, z) = (a, b) + (b, c)$ . Dieser Punkt ist nach (2, 2) auch der Fußpunkt des Lotes aus  $d$  auf  $(a, b)$ . Damit ist der Satz, die sog. ARCHIMEDISCHE Prämisse, bewiesen.

(4, 3) Sind  $a, b, c$  die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks im Einheitskreis und wird das Dreieck im Gegenuhrzeigersinn umlaufen, dann ist  $b = a\varepsilon, c = a\varepsilon^2$ , wobei  $\varepsilon = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{-3})$ ,  $\varepsilon^2 = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{-3}) = \bar{\varepsilon}$  die dritten Einheitswurzeln sind. Sind nun  $u, v$  zwei beliebige Punkte der komplexen Ebene, dann

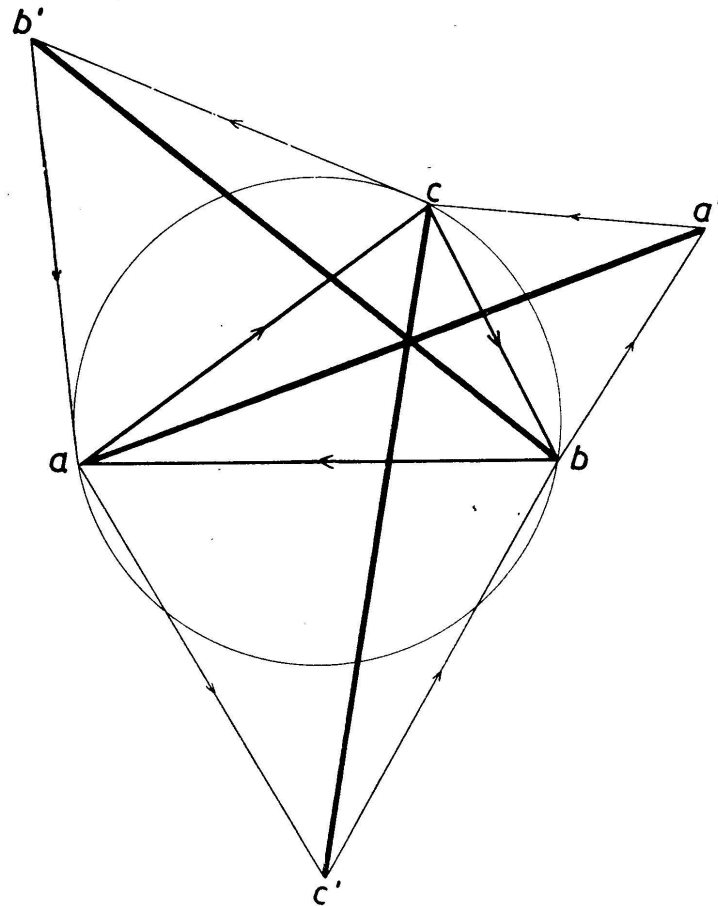


Abb. 11.

Vom isoptischen Punkt des Dreiecks.

werden sie durch jenen Punkt  $\omega$  zu einem im Gegenuhrzeigersinn umlaufenden gleichseitigen Dreieck ergänzt, für den

$$u + \varepsilon v + \varepsilon^2 \omega = 0$$

ist.

Wir geben ein im Uhrzeigersinn umlaufenes Dreieck  $(a, b, c)$  im Einheitskreis und errichten über seinen Seiten nach außen gleichseitige Dreiecke (Abb. 11). Deren freie Ecken  $a', b', c'$  müssen bzw. mit  $(c, b)$ ,  $(a, c)$ ,  $(b, a)$  zusammengenommen werden, damit wir im Gegenuhrzeigersinn umlaufene gleich-

seitige Dreiecke erhalten, auf die wir die obige Formel anwenden können. Es ergibt sich

$$\begin{cases} a' = -\varepsilon^2 b - \varepsilon c, \\ b' = -\varepsilon^2 c - \varepsilon a, \\ c' = -\varepsilon^2 a - \varepsilon b, \end{cases} \quad \text{also} \quad \begin{cases} a - a' = a + \varepsilon^2 b + \varepsilon c = t, \\ b - b' = b + \varepsilon^2 c + \varepsilon a = t\varepsilon, \\ c - c' = c + \varepsilon^2 a + \varepsilon b = t\varepsilon^2. \end{cases}$$

Daraus folgt, daß die Vektoren  $(a - a')$ ,  $(b - b')$ ,  $(c - c')$  gleichlang sind und je zu zweit den Winkel  $\frac{2\pi}{3}$  einschließen.

Die Parallele zur Geraden  $(a, a')$  durch den Ursprung schneidet den Einheitskreis in den Punkten  $\frac{t}{|t|}$  und  $-\frac{t}{|t|}$ ; also ist das Richtungsmaß dieser Geraden gleich  $-\frac{t^2}{|t|^2} = -\frac{t}{t}$  und die Gleichung der Geraden

$$(a, a') \text{ gleich } \bar{t}(z - a) = t(\bar{z} - \bar{a});$$

entsprechend die Gleichung von

$$(b, b') \text{ gleich } \varepsilon^2 \bar{t}(z - b) = \varepsilon t(\bar{z} - \bar{b})$$

und die Gleichung von

$$(c, c') \text{ gleich } \varepsilon \bar{t}(z - c) = \varepsilon^2 t(\bar{z} - \bar{c}).$$

Werden diese drei Gleichungen addiert, dann ergibt sich auf beiden Seiten Null; also ist die dritte Gleichung eine Folge der beiden vorhergehenden, und somit gehen die drei Geraden durch den nämlichen Punkt  $z$ , den sog. *isoptischen* Punkt des Dreiecks<sup>10)</sup>. Er liegt *innerhalb* des Dreiecks, wenn jeder der drei Winkel kleiner als  $\frac{2\pi}{3}$  ist.

(4, 4) Wenn wir die inneren Winkeldrittelnden eines Dreiecks nächst den Seiten zum Schnitt bringen, dann erhalten wir die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks.

Um diesen interessanten Satz zu erweisen, der eine ganze Literatur hervorgebracht hat<sup>11)</sup>, bezeichnen wir die Ecken des

<sup>10)</sup> Der isoptische Punkt ist im Zusammenhang mit der Aufgabe FERMATS für TORRICELLI (P. DE FERMAT, *Œuvres* I, ed. P. Tannery-Ch. Henry, Paris 1891, 153; vgl. *Œuvres* V, ed. C. de Waard, Paris 1922, 127/28 und E. TORRICELLI, *Opere* III, ed. G. Vassura, Faenza 1919, 425/31) von TORRICELLI entdeckt worden.

<sup>11)</sup> Der Satz wurde 1904 von FR. MORLEY brieflich an Freunde in England gegeben. Er findet sich erstmals gedruckt in W. L. MUIR, *Morley's Trisections Theorem*, Proceedings Edinburgh Math. Soc. 32, 1913.

Dreiecks im Einheitskreis mit  $a^3, b^3, c^3$  und die Drittelpunkte des Bogens  $(b^3, c^3)$ , der  $a^3$  nicht enthält, mit  $b^2 c$  und  $bc^2$ , ferner die Drittelpunkte des Bogens  $(c^3, a^3)$ , der  $b^3$  nicht enthält, mit  $c^2 a$  und  $ca^2$  (Abb. 12). Ist  $t$  der Drittelpunkt des dritten Bogens nächst  $a^3$ , dann ist

$$\frac{t}{a^3} \cdot \frac{b^2 c}{b^3} \cdot \frac{c^2 a}{c^3} = \varepsilon ,$$

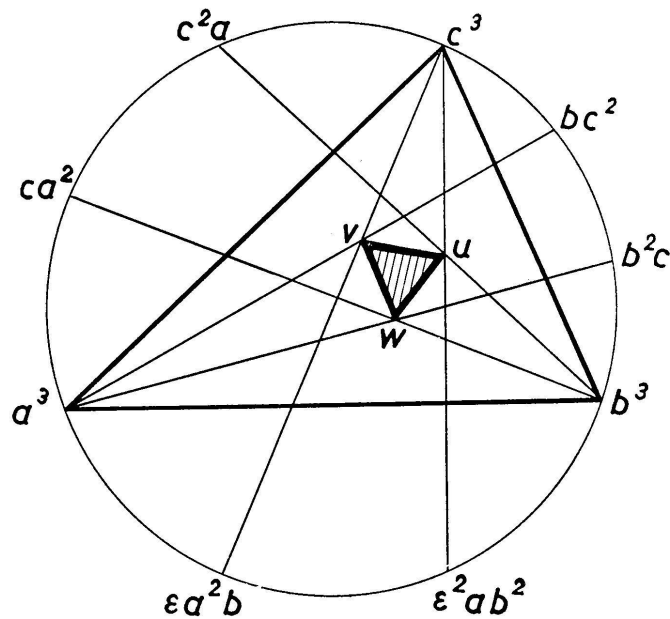


Abb. 12.

Zum Morleyschen Satz.

also  $t = \varepsilon a^2 b$ . Der andere bogendrittelnde Punkt ist also  $\varepsilon^2 ab^2$ . Der Schnittpunkt  $w$  der Winkeldrittelnden nächst  $(a^3, b^3)$  ergibt sich aus dem Gleichungspaar

$$\begin{cases} w + a^3 b^2 \overline{cw} = a^3 + b^2 c , \\ w + a^2 b^3 \overline{cw} = b^3 + a^2 c . \end{cases}$$

Wir entfernen  $\overline{w}$  und kürzen mit  $a - b$ . So finden wir

$$\begin{cases} w = -ab(a+b) + c(a^2 + ab + b^2) \text{ und entsprechend} \\ u = -\varepsilon bc(\varepsilon b + c) + a(\varepsilon^2 b^2 + \varepsilon bc + c^2) , \\ v = -\varepsilon ca(\varepsilon c + a) + \varepsilon b(\varepsilon^2 c^2 + \varepsilon ac + a^2) . \end{cases}$$

Jetzt ist  $u + \varepsilon v + \varepsilon^2 w = abc(1 + \varepsilon + \varepsilon^2) = 0$ ; also ist  $(u, v, w)$  wirklich ein gleichseitiges Dreieck.

## 5. VON DER PFEILLÄNGE.

(5, 1) Sind  $p$  und  $q$  zwei Punkte auf dem Umfang des Einheitskreises, dann ist das Quadrat ihres Abstandes bestimmt aus

$$|q - p|^2 = (q - p)(\bar{q} - \bar{p}) = \frac{(q - p)^2}{-pq}.$$

Folglich ist

$$|q - p| = \frac{q - p}{\sqrt{-pq}} = |\overrightarrow{p, q}|$$

das mit Vorzeichen behaftete reelle Längenmaß der Sehne  $(\overrightarrow{p, q})$ . Es ändert sein Zeichen, wenn  $p$  und  $q$  vertauscht werden.

5, 2) Ordnen wir nunmehr den Ecken eines Sehnendreiecks im Einheitskreis wie am Ende von (2, 3) die Zahlen  $a^2, b^2, c^2$  zu, dann ist der Mittelpunkt des FEUERBACH-Kreises bestimmt aus

$$\frac{d}{2} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$$

und der Inkreismittelpunkt aus  $i = -(bc + ca + ab)$ . Also ist

$$\frac{d}{2} - i = \frac{(a + b + c)^2}{2}; \quad \left| \frac{d}{2} - i \right| = \frac{(a + b + c)(bc + ca + ab)}{2abc}.$$

Um das Längenmaß des Inkreishalbmessers zu bestimmen, fällen wir auf die Sehne  $(a^2, b^2)$ , nämlich  $z + a^2 b^2 \bar{z} = a^2 + b^2$  (vgl. 3, 2), das Lot aus  $i$ . Seine Gleichung hat den Richtungsteil  $z - a^2 b^2 \bar{z}$  und das absolute Glied  $i - a^2 b^2 \bar{i} = \frac{(ab - c^2)(a + b)}{c}$ . Indem wir  $\bar{z}$  durch Addieren aus den beiden Geradengleichungen entfernen, erhalten wir nach leichter Umformung

$$z - i = \frac{(b + c)(c + a)(a + b)}{2c} \quad \text{und} \quad \rho = \pm \frac{(b + c)(c + a)(a + b)}{2abc}.$$

Außerdem ist  $r = 1$ . Andererseits ist

$$i^2 = \frac{(a + b + c)(bc + ca + ab)}{abc} = 1 + \frac{(b + c)(c + a)(a + b)}{abc} = r^2 \pm 2r\rho.$$

Da aber der Inkreismittelpunkt vom Umkreismittelpunkt nicht weiter als höchstens um  $r$  abstehen kann, trifft das Zeichen  $+$  für  $\rho$  nicht zu. Es verbleibt die Beziehung von CHAPPLE-EULER <sup>12)</sup>

$$|i|^2 = r^2 - 2r\rho.$$

Wird jedoch aus dem Inkreis einer der *Ankreise*, dann ist  $2r\rho_k$  mit dem *positiven* Zeichen zu nehmen. Weiterhin erhalten wir

$$\left| \frac{d}{2} - i \right| = \frac{r}{2} - \rho \geq 0.$$

Somit berührt der *Inkreis* den FEUERBACH-Kreis von *innen* und wird ganz von diesem *umschlossen*. Entsprechend: Die *Ankreise* berühren den FEUERBACH-Kreis von *außen* <sup>13)</sup>.

(5, 3) Außerdem ergibt sich ähnlich wie vorhin

$$\rho_a = - \frac{(b+c)(b-a)(c-a)}{2abc} \text{ usw.}$$

Daraus folgt nach einfacher Rechnung die nach STEINER <sup>14)</sup> benannte Beziehung

$$\rho_a + \rho_b + \rho_c - \rho = 4r.$$

Der Mittelpunkt der Dreiecksseite  $(a^2, b^2)$  ist  $\frac{a^2 + b^2}{2}$ . Folglich ist der mit Vorzeichen behaftete Abstand des Umkreismittelpunktes von dieser Seite gleich  $\pm \frac{a^2 + b^2}{2ab}$ . Also ist die Abstandsumme des Umkreismittelpunktes von den drei Seiten des Dreiecks gleich

$$\begin{aligned} \pm \frac{(a^2 + b^2)c + (b^2 + c^2)a + (c^2 + a^2)b}{2abc} = \\ \pm \frac{(b+c)(c+a)(a+b) - 2abc}{2abc} = \pm (r + \rho). \end{aligned}$$

<sup>12)</sup> W. CHAPPLE in den *Miscellanea curiosa mathematica*, 1, 1746, 123 (zitiert nach SIMON <sup>1)</sup>, 140).

<sup>13)</sup> EULER <sup>2)</sup> hat zwar die Berechnung von  $|i|^2$ , aber noch nicht die Form  $r^2 - 2r\rho$ .

<sup>14)</sup> Der Satz stammt in Wirklichkeit von FEUERBACH <sup>1)</sup>, 4, wird jedoch in der neueren Literatur stets nach STEINER benannt, so z.B. bei DÖRRIE <sup>3)</sup>, 59/60. Dort fehlt jedoch der Hinweis darauf, daß die *algebraische* Summe zu nehmen ist.



Also ist die Abstandsumme des Umkreismittelpunktes von den Dreieckseiten gleich  $r + \rho$ , wenn das Dreieck *spitzwinklig* oder *rechtwinklig* ist. Im *stumpfwinkligen* Dreieck muß der Abstand von der längsten Dreieckseite von der Abstandsumme der beiden anderen *abgezogen* werden. Also ist  $r + \rho$  gleich der *algebraischen* Abstandsumme des Umkreismittelpunktes von den Dreieckseiten.

(5, 4) Ist  $\mathfrak{U}$  der Umkreis und  $\mathfrak{I}$  der Inkreis eines Dreiecks, so gibt es  $\infty^1$  weitere Dreiecke, die  $\mathfrak{U}$  zum Umkreis und  $\mathfrak{I}$  zum Inkreis haben. Die FEUERBACH-Kreise dieser Dreiecke haben stets den festen Halbmesser  $\frac{r}{2}$ ; sie berühren den Inkreis umschließend von innen. Während sich das Dreieck in  $\mathfrak{U}$  um  $\mathfrak{I}$  bewegt, rollt der FEUERBACH-Kreis um den festen Inkreis herum. Sein Mittelpunkt hat von  $i$  den festen Abstand  $\frac{r}{2} - \rho$ , wandert also auf einem zum Inkreis konzentrischen. Auch der Höhenschnittpunkt des Dreiecks wandert auf einem Kreis; dessen Mittelpunkt ist der Spiegelpunkt  $2i$  des Umkreismittelpunktes  $O$  an  $i$ , sein Halbmesser gleich  $r - 2\rho$ .

Entsprechendes gilt auch für die FEUERBACH-Kreise und die Höhenschnittpunkte jener Dreiecke im Umkreis  $\mathfrak{U}$ , die außerdem einen passenden Kreis zum Ankreis haben.

Ähnliches gilt auch für die Beziehungen der  $\infty^1$  Inkreise bzw. Ankreise der Dreiecke, die wie in (1, 4) den nämlichen Umkreis und FEUERBACH-Kreis haben; allerdings ändert diesmal  $\rho$  fortwährend seine Grösse.

(5, 5) *Die Fußpunkte der Lote aus den Ecken eines Dreiecks auf dessen äußere Winkelhalbierenden liegen auf einem Kreis* <sup>15)</sup> (Abb. 13).

Diese Behauptung hängt mit jener von (4, 1) zusammen. Sie ist nämlich gleichwertig mit der folgenden: Die fraglichen sechs Punkte sind vom Schnittpunkt  $m = \frac{1}{2}(p^2 + q^2 + r^2 + qr + rp + pq)$  der Parallelen zu den inneren Winkelhalbierenden des Dreiecks durch dessen Seitenmitten gleichweit entfernt.

<sup>15)</sup> Satz von EUTARIS (Pseudonym für RESTIAU) in H. VUIBERT, *Journ. Math. Élément.* (Brüssel), November 1877, zitiert nach SIMON <sup>1)</sup>, 135.

Zum Nachweis schneiden wir die äußere Winkelhalbierende

$$z + p^2 q r \bar{z} = p^2 + q r$$

mit dem Lot aus  $q^2$  auf sie, nämlich

$$z - p^2 q r \bar{z} = q^2 - \frac{p^2 r}{q}.$$

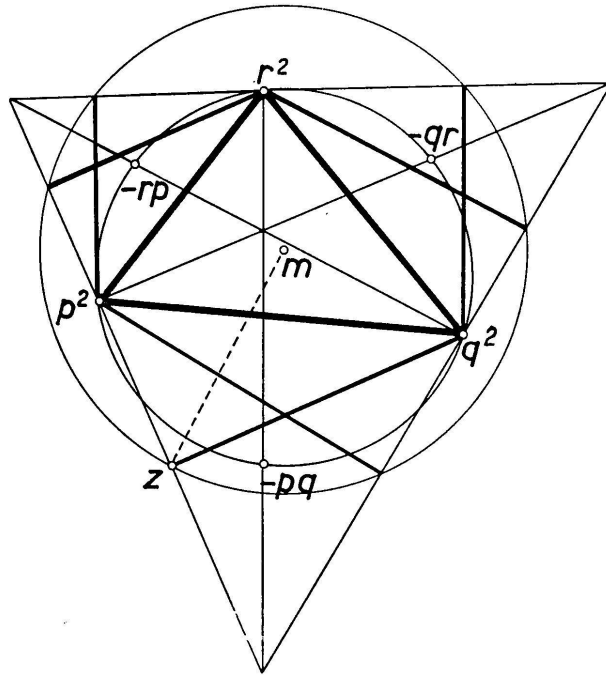


Abb. 13.

Ein Sechspunktekreis.

Wir erhalten

$$z = \frac{1}{2} \left( p^2 + q^2 + q r - p^2 \cdot \frac{r}{q} \right),$$

also

$$m - z = \frac{p q^2 + q r^2 + r p^2 + p q r}{2 q}$$

und

$$|m - z|^2 = \frac{(p q^2 + q r^2 + r p^2 + p q r) (p^2 q + q^2 r + r^2 p + p q r)}{4 p^2 q^2 r^2}.$$

Dieser Ausdruck ist in  $p, q, r$  symmetrisch. Damit ist alles bewiesen. Natürlich lässt sich auch dieser Satz unter Hinzunahme äußerer und innerer Winkelhalbierenden zweckmäßig variieren.

(5, 6) Etwas schwieriger und auf andere Weise schwerlich einer einfachen Behandlung zugänglich ist die folgende Frage <sup>16)</sup>:

<sup>16)</sup> Problem von EULER <sup>3)</sup>, *Opera* a.a.O., 150/51. Vgl. DÖRRIE <sup>3)</sup>, 20/26.

Von welcher Art ist das Problem, ein Dreieck aus dem Inkreismittelpunkt, dem Umkreismittelpunkt und dem Höhenschnittpunkt zu bestimmen?

Machen wir den Umkreismittelpunkt zum Ursprung, so ist der Inkreismittelpunkt aus  $i$ , der Höhenschnittpunkt aus  $d$  bestimmt. Wir ermitteln  $2i$  und kennen  $|i|^2 = r(r - 2\rho)$  und  $|d - 2i| = r - 2\rho$ , also auch  $r$  und  $\rho$ , beides mit Zirkel und Lineal konstruierbar. Machen wir  $r$  zur Längeneinheit, dann ist

$$a + b + c = \sqrt{d - 2i},$$

$$bc + ca + ab = -i,$$

$$abc = \frac{(a + b + c)(bc + ca + ab)}{|i|^2} = -\frac{\sqrt{d - 2i}}{\bar{i}}$$

und

$$\left\{ \begin{array}{l} a^2 + b^2 + c^2 = d, \\ b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2 = i^2 + \frac{2(d - 2i)}{\bar{i}}, \\ a^2 b^2 c^2 = \frac{d - 2i}{\bar{i}^2}. \end{array} \right.$$

Es liegt ein Problem dritten Grades vor; die Ecken des Dreiecks auf dem Umkreis ergeben sich als die Lösungen der kubischen Gleichung

$$z^3 - dz^2 + \left[ i^2 + \frac{2(d - 2i)}{\bar{i}} \right] z - \frac{d - 2i}{\bar{i}^2} = 0.$$

Da die Koeffizienten dieser Gleichung aus  $d$  und  $i$  rational hergestellt werden können, ist das Dreieck eindeutig bestimmt.

## 6. VON DEN TANGENTEN.

6, 1) Lassen wir in der Geradengleichung von (3, 2) den Punkt  $b$  auf dem Einheitskreis gegen  $a$  hinrücken, dann erhalten wir die Gleichung der Tangente an den Einheitskreis in  $a$  in der Form:

$$\boxed{z + a^2 \bar{z} = 2a}.$$

Darnach schneiden sich die Tangenten an den Einheitskreis in dessen Umfangspunkten  $a$  und  $b$  im Punkt  $z = \frac{2ab}{a+b}$ . Außerdem ist  $z$  das inverse Bild des Sehnenmittelpunktes  $\frac{a+b}{2}$ .

Hieraus geht durch Division mit  $a$  die *Polarengleichung*  $\bar{a}z + a\bar{z} = 2$  hinsichtlich des Einheitskreises hervor. Ist  $a$  ein beliebiger Punkt der Ebene, dann stellt diese Gleichung die Polare des Punktes  $a$  hinsichtlich des Einheitskreises dar. Ist umgekehrt  $pz + q\bar{z} = r$  die Gleichung einer Geraden, die nicht durch den Ursprung geht ( $r \neq 0$ ), dann wird sie nach Multiplikation mit  $\frac{2}{r}$  zur Polarengleichung. Da rechts etwas Reelles herauskommt, müssen die Faktoren bei  $z$  und  $\bar{z}$  konjugiert komplex sein; der Faktor  $\frac{2q}{r} = a$  kennzeichnet den *Pol* der Geraden. Auf diesem Wege sind sämtliche Polareigenschaften hinsichtlich des Einheitskreises sogleich herleitbar. Indem wir auf der rechten Seite der Polarengleichung  $+2$  durch  $-2$  ersetzen, erhalten wir auch die *Antipolarengleichung* und alle Eigenschaften der Antipolarität.

(6, 2) Wir beweisen zunächst den nach NEWTON benannten Satz <sup>17)</sup>:

*Die Verbindungsgeraden der Diagonalmitten eines Tangentenvierecks gehen durch den Inkreismittelpunkt.*

Die Berührungspunkte der vier Tangenten mit dem als Einheitskreis angesehenen Inkreis seien  $a, b, c, d$ ; also ist der Mittelpunkt einer der Diagonalen gleich

$$m = \frac{ab}{a+b} + \frac{cd}{c+d} = \frac{\Sigma abc}{(a+b)(c+d)}.$$

Folglich ist  $m : \bar{m} = \Sigma abc : \Sigma a$ . Nun ist aber  $m : \bar{m}$  kennzeichnend für die Richtung des Ortsvektors  $m$  und ersichtlich aus  $a, b, c, d$  symmetrisch aufgebaut. Folglich haben die zwei Ortsvektoren aus dem Mittelpunkt des Inkreises zu den Diagonalschnittpunkten hin die nämliche Richtung; also liegen sie in *einer* Geraden durch den Inkreismittelpunkt.

<sup>17)</sup> Vgl. SIMON <sup>1)</sup>, 162 und DÖRRIE <sup>3)</sup>, 52/54. Die Aufgabe soll mit der Bestimmung des Mittelpunktortes aller Ellipsen zusammenhängen, die einem konvexen Viereck einbeschrieben sind. Ich habe die Stelle bei NEWTON nicht finden können.

(6, 3) Die zu den Ecken  $a, b, c$  eines Dreiecks im Einheitskreis gehörenden Tangenten schneiden sich in den Punkten  $\frac{2bc}{b+c}, \frac{2ca}{c+a}, \frac{2ab}{a+b}$ . Der Umkreismittelpunkt  $u$  dieses Tangentendreiecks liegt z.B. auf dem Mittellot zu  $\frac{2ca}{c+a}, \frac{2ab}{a+b}$ . Dessen Richtungsteil ist  $z - a^2 \bar{z}$ ; das konstante Glied ist

$$\frac{ca}{c+a} + \frac{ab}{a+b} - a^2 \left( \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right).$$

Das Mittellot hat also die Gleichung

$$z - a^2 \bar{z} = \frac{2a(bc - a^2)}{(a+b)(c+a)}.$$

Entsprechend

$$z - b^2 \bar{z} = \frac{2b(ca - b^2)}{(a+b)(b+c)}.$$

Daraus

$$u = \frac{2abc(a+b+c)}{(b+c)(c+a)(a+b)}, \quad \bar{u} = \frac{2(bc+ca+ab)}{(b+c)(c+a)(a+b)}$$

und z.B.

$$\frac{2bc}{b+c} - u = \frac{2b^2c^2}{(b+c)(c+a)(a+b)} \text{ mit dem absoluten Betrag} \\ \pm \frac{2abc}{(b+c)(c+a)(a+b)}.$$

Das ist der Ausdruck für den Umkreishalbmesser  $r$  des Tangentendreiecks. Er genügt noch der Relation von CHAPPLE-EULER (5, 2). Aus ihr geht hervor, dass  $r$  das negative Vorzeichen erhalten muß. Also ist

$$a + b + c = -\frac{\rho u}{r}.$$

Folglich teilt  $O$ , der Inkreismittelpunkt des Tangentendreiecks und zugleich Umkreismittelpunkt des Ausgangsdreiecks, die Strecke zwischen dem Umkreismittelpunkt  $u$  des Tangentendreiecks und dem Höhenschnittpunkt  $h = a + b + c$  des Ausgangsdreiecks im Verhältnis  $r:\rho$  von  $u$  ab. Vgl. Abb. 14.

Ist nun  $a'$  der Schnittpunkt des zum Vektor  $a$  gleichgerichteten Pfeils durch  $u$  mit dem Umkreis, dann ist  $a' - u = \frac{ar}{\rho}$ ,

also  $a' = \frac{2abc}{(c+a)(a+b)}$  usw. Die Umkreisradien des Dreiecks  $(a', b', c')$  aus den Ecken bis zu  $u$  hin sind parallel zu den Umkreisradien des Ausgangsdreiecks  $(a, b, c)$  aus den Ecken bis zu  $O$  hin; also sind diese Dreiecke *ähnlich und ähnlich gelegen*. Das lineare Maßstabsverhältnis zwischen entsprechenden Strecken beider Figuren ist  $r: \rho$ , der Ähnlichkeitspunkt  $z = -u \cdot \frac{\rho}{r - \rho}$ .

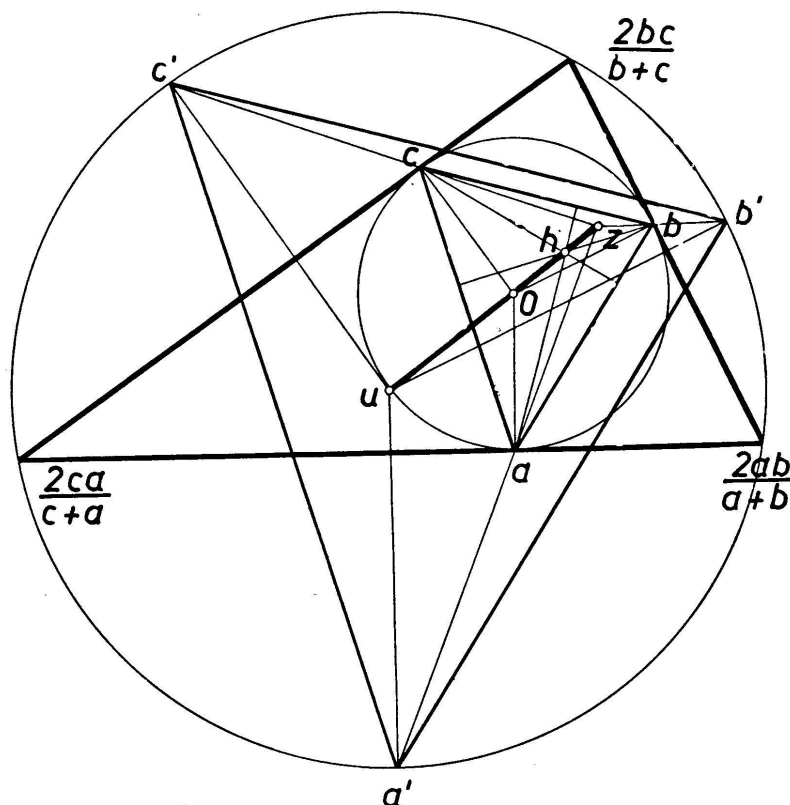


Abb. 14.

Dreiecksbeziehungen.

Also teilt  $z$  die über  $O$  hinaus verlängerte Strecke  $uO$  von außen im Verhältnis  $r: \rho$  von  $u$  ab.

Die Punkte  $h$  und  $z$  sind fest, wenn  $O$  und  $u$  fest sind, d.h. für alle Dreiecke, die dem Kreis um  $u$  eingeschrieben und dem Kreis um  $O$  umschrieben sind. Die Sehnendreiecke aus ihren Berührungspunkten im Inkreis haben einen und den nämlichen FEUER-BACH-Kreis.

(6, 4) Wann ist ein Tangentenviereck gleichzeitig Sehnen-viereck, also bizentrisch?

Wir gehen aus von vier Punkten  $a, b, c, d$  auf dem Umfang des als Einheitskreis angesehenen Inkreises des Tangenten-

vierecks. Dabei nehmen wir an, daß sich die Sehnen  $(a, c)$  und  $(b, d)$  *innerhalb* des Kreises schneiden (Abb. 15). Sollen die zugehörigen Tangenten gleichzeitig ein *Sehnenviereck* abgrenzen, dann müssen sich z.B. die Winkel in den Gegenecken  $\frac{2ab}{a+b}$  und  $\frac{2cd}{c+d}$  zu zwei Rechten ergänzen, also die Bögen  $(a, b)$  und  $(c, d)$

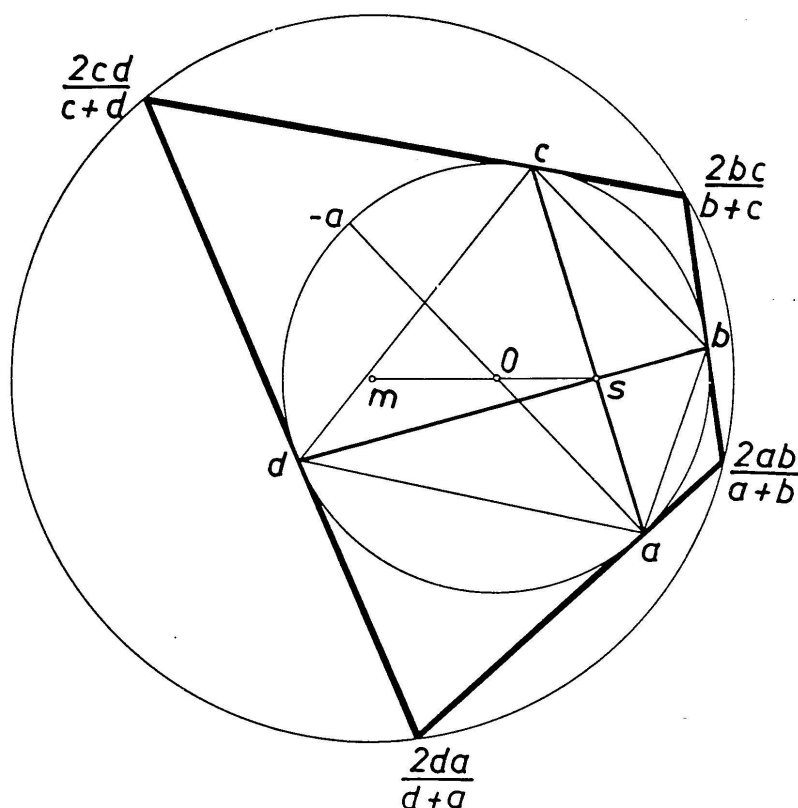


Abb. 15.

Bizentrisches Viereck.

auf dem Einheitskreis zu einem Halbkreis. Folglich sind die Bögen  $(b, -a)$  und  $(c, d)$  gleich, also  $-\frac{a}{b} = \frac{d}{c}$  oder

$$ac + bd = 0.$$

Das besagt: *Das Tangentenviereck ist gleichzeitig Sehnenviereck, wenn sich die Diagonalen des aus den Berührungspunkten gebildeten Vierecks im Inkreis senkrecht schneiden.*

Die Gleichungen dieser Diagonalen sind  $z + ac\bar{z} = a + c$ ;  $z + bd\bar{z} = b + d$ ; folglich ist  $s = \frac{a + b + c + d}{2}$  der fragliche

Schnittpunkt und gleichzeitig (vgl. 3, 3) gemeinsamer Punkt der FEUERBACH-Kreise, die zu den vier Sehnendreiecken im Inkreis gehören, die sich aus den Punkten  $a, b, c, d$  bilden lassen. Ersichtlich gilt auch die Umkehrung:

*Wenn der Diagonalschnittpunkt eines Sehnenvierecks auf jedem der FEUERBACH-Kreise liegt, die zu den vier Sehnendreiecken aus je drei der vier Eckpunkte des Sehnenvierecks gehören, dann stehen die Diagonalen des Sehnenvierecks auf einander senkrecht.*

(6, 5) Nun kehren wir zu unserem bizentrischen Viereck zurück und bestimmen den Mittelpunkt  $m$  des Umkreises: dieser befindet sich z.B. auf den Mittelloten (vgl. 6, 3)

$$z - a^2 \bar{z} = \frac{2a(bd - a^2)}{(d + a)(a + b)}$$

und

$$z - c^2 \bar{z} = \frac{2c(bd - c^2)}{(b + c)(c + d)}.$$

Wir erhalten unter Berücksichtigung von  $ac + bd = 0$

$$m = \frac{2abcd \Sigma a}{(a + b)(b + c)(c + d)(d + a)}.$$

Nun ist aber

$$(a + b)(b + c)(c + d)(d + a) = (ac + bd)^2 + \Sigma a^2(bc + cd + db)$$

und

$$\Sigma a \cdot \Sigma abc = 4abcd + \Sigma a^2(bc + cd + db),$$

also im vorliegenden Falle

$$(a + b)(b + c)(c + d)(d + a) = -4abcd + \Sigma a \cdot \Sigma abc.$$

Außerdem ist

$$abc = abcd \cdot \sum \frac{1}{a} = 2abcd\bar{s};$$

also nach kurzer Rechnung  $m = s:(\bar{s} - 1)$ . Somit liegen der Inkreismittelpunkt  $O$ , der Umkreismittelpunkt  $m$  und der Diagonalschnittpunkt  $s$  in *einer* Geraden;  $O$  liegt zwischen  $m$  und  $s$  und die Längen der Pfeile  $(m, O)$  und  $(m, s)$  verhalten sich wie  $\rho^2$  zu  $s^2$ .



Weiterhin ist

$$m\bar{m} = \frac{s\bar{s}}{(s\bar{s} - 1)^2} = \frac{4abcd \cdot \Sigma a \cdot \Sigma abc}{(\Sigma a \cdot \Sigma abc - 4abcd)^2} = |m|^2.$$

Zur Bestimmung des Umkreishalbmessers  $r$  bilden wir

$$\frac{2ab}{a+b} - m = \frac{2ab(-bdc - acd + abd + abc)}{(a+b)(b+c)(c+d)(d+a)}$$

und den dazu konjugiert komplexen Wert. Dann ergibt sich nach kurzer Rechnung

$$r^2 = \frac{4abcd(8abcd - \Sigma a \cdot \Sigma abc)}{(\Sigma a \cdot \Sigma abc - 4abcd)^2}.$$

Somit ist

$$r^2 + |m|^2 = 2 \left[ \frac{4abcd}{\Sigma a \cdot \Sigma abc - 4abcd} \right]^2$$

und

$$r^2 - |m|^2 = -2 \cdot \frac{4abcd}{\Sigma a \cdot \Sigma abc - 4abcd},$$

also <sup>18)</sup>

$$(r^2 - |m|^2)^2 = 2\rho^2(r^2 + |m|^2).$$

Daraus folgt der bekannte Schließungssatz:

*Besteht zwischen den Halbmessern  $r$  und  $\rho$  zweier Kreise und ihrem Mittelpunktabstand  $|m|$  die soeben hergeleitete Beziehung, dann gibt es  $\infty^1$  bizentrische Vierecke, die den Kreis des Halbmessers  $\rho$  berühren und im Kreis des Halbmessers  $r$  liegen; die Verbindungssehnern ihrer Berührungspunkte im Inkreis schneiden sich dortselbst stets im nämlichen Punkt  $s$ , und zwar unter rechtem Winkel.*

## 7. VOM FLÄCHENINHALT.

(7, 1) Um den Flächeninhalt  $\Delta$  des Dreiecks zu bestimmen, dessen Seiten den Einheitskreis in den Punkten  $a, b, c$  berühren, berechnen wir zunächst das gerichtete Längenmaß der Dreiecksseiten (vgl. Abb. 14): Wir bilden nämlich

$$\frac{2ab}{a+b} - \frac{2ac}{a+c} = \frac{2a^2(b-c)}{(a+b)(a+c)}.$$

<sup>18)</sup> N. Fuss, *Nova Acta Petrop.* 13, für 1795/96, ausgeg. 1802, 166.

Diese gerichtete Strecke hat den absoluten Betrag

$$\frac{2a(b-c)\sqrt{-1}}{(a+b)(a+c)};$$

also das Dreieck die Fläche

$$\Delta = \frac{(b-c)(c-a)(a-b)}{(b+c)(c+a)(a+b)}\sqrt{-1}.$$

Auch dieser Ausdruck ist mit einem Vorzeichen behaftet und abhängig vom Umlaufssinn, der sich aus der gewählten Reihenfolge der Ecken ergibt. Sind die beiden Bestandteile der komplexen Einheitsvektoren  $a, b, c$  *rational*, dann sind auch die Seitenlängen und die Fläche des Dreiecks rational; wir haben also ein heronisches Dreieck vor uns.

(7, 2) Als *Sehndreieck* wird das Dreieck dann heronisch, wenn wir ihm die Ecken  $a^2, b^2, c^2$  geben wie am Ende von (2, 2). Jetzt haben die Seiten gemäß (5, 1) die gerichteten Längenmaße

$$\frac{b^2 - c^2}{bc}\sqrt{-1} \text{ usw. ;}$$

also ist die halbe Seitensumme

$$\frac{(b-c)(c-a)(a-b)\sqrt{-1}}{2abc}.$$

Unter Mitverwendung der Formel für  $\rho$  aus (5, 2) erhält die Dreiecksfläche nunmehr die Form

$$\Delta = \frac{(b^2 - c^2)(c^2 - a^2)(a^2 - b^2)}{4a^2 b^2 c^2 \sqrt{-1}}.$$

(7, 3) Die Dreiecksformel dient zur Bestimmung des Flächeninhaltes  $F$  eines Sehnenvierecks, dem wir die Ecken  $a^2, b^2, c^2, d^2$  geben. Indem wir den Umlaufsinn der Teildreiecke  $(a^2, b^2, c^2)$  und  $(a^2, c^2, d^2)$  beachten, erhalten wir als Fläche

$$\begin{aligned} F &= \frac{(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)(c^2 - a^2)}{4a^2 b^2 c^2 \sqrt{-1}} + \frac{(a^2 - c^2)(c^2 - d^2)(d^2 - a^2)}{4a^2 c^2 d^2 \sqrt{-1}} = \\ &= - \frac{(a^2 - c^2)(b^2 - d^2)(a^2 c^2 - b^2 d^2)}{4a^2 b^2 c^2 d^2 \sqrt{-1}}. \end{aligned}$$

Die Vierecksseiten müssen so orientiert werden:

$$\frac{a^2 - b^2}{ab} \sqrt{-1}; \quad \frac{b^2 - c^2}{bc} \sqrt{-1}; \quad \frac{c^2 - d^2}{cd} \sqrt{-1}; \quad \frac{a^2 - d^2}{ad} \sqrt{-1}$$

Dann erhalten wir der Reihe nach als Halbsumme der Seiten, vermindert um je eine der Seiten:

$$\begin{aligned} & \frac{(ac - bd)(a + c)(b - d)}{-2abcd \sqrt{-1}}, & \frac{(ac + bd)(a + c)(b + d)}{-2abcd \sqrt{-1}}, \\ & \frac{(ac - bd)(a - c)(b + d)}{-2abcd \sqrt{-1}}, & \frac{(ac + bd)(a - c)(b - d)}{2abcd \sqrt{-1}}. \end{aligned}$$

Wir kommen vom ersten (direkt berechneten) Ausdruck zum zweiten, indem wir  $b$  durch  $-b$  ersetzen, von diesem zum nächsten, indem wir  $c$  durch  $-c$  ersetzen, und schliesslich von diesem zum letzten, indem wir  $d$  durch  $-d$  ersetzen. Nach Multiplikation der letzten vier Ausdrücke erhalten wir das Quadrat von  $F$ ; damit ist die bekannte Inhaltsformel für das Sehnenviereck gefunden <sup>19)</sup>.

(7, 4) Der Flächeninhalt des Sehnendreiecks  $(u, \varphi, \omega)$  im Einheitskreis kann auch in der Form

$$\frac{1}{4u\varphi\omega \sqrt{-1}} \begin{vmatrix} u^2 & 1 & u \\ \varphi^2 & 1 & \varphi \\ \omega^2 & 1 & \omega \end{vmatrix} = \frac{1}{4\sqrt{-1}} \begin{vmatrix} u & \bar{u} & 1 \\ \varphi & \bar{\varphi} & 1 \\ \omega & \bar{\omega} & 1 \end{vmatrix}$$

geschrieben werden. Diese Formel bleibt auch dann noch richtig, wenn  $u, \varphi, \omega$  drei beliebige Punkte sind, die *nicht* mehr auf dem Umfang des Einheitskreises liegen. Wir verwenden sie zum Beweis des PASCALSchen Lehrsatzes <sup>20)</sup>:

*Die Gegenseiten eines Sehnensechsecks im Kreis schneiden sich in den Punkten einer Geraden (Abb. 16).*

<sup>19)</sup> Die Flächeninhaltsformel tritt erstmals bei den Indern auf, dann unter deren Einfluß bei den Arabern. Im Abendland findet sie sich unabhängig von diesen Vorgängern in der von W. SNELL besorgten und mit dessen Zusätzen ausgestatteten lateinischen Ausgabe von Ludolf VAN CEULEN, *De arithmetische en geometrische Fundamenten*, Leiden 1615, 21619. Vgl. auch J. TROPFKE, *Geschichte der Elementarmathematik*, IV<sup>3</sup>, Berlin 1940, 150/68.

<sup>20)</sup> Der Satz erscheint bereits in *Essay pour les coniques* von 1640 (Vorform), dann in der heutigen Fassung in den 1654 abgeschlossenen und auf Grund eines LEIBNIZschen Gutachtens 1676 zum Druck beförderten *Conica*, die beim Setzer zu Verlust gegangen und nicht an die Öffentlichkeit gekommen sind. Vgl. ferner TROPFKE <sup>19)</sup>, 231/32.

Die Ecken des Sehnensechsecks seien  $a, b, c, d, e, f$ ; die Schnittpunkte der Gegenseiten seien

$$u = (b, c) \times (e, f) ; \quad v = (c, d) \times (f, a) ; \quad w = (d, e) \times (a, b) .$$

Die Gleichungen der Seiten  $(b, c)$  bzw.  $(e, f)$  sind

$$z + bc\bar{z} = b + c \text{ bzw. } z + ef\bar{z} = e + f .$$

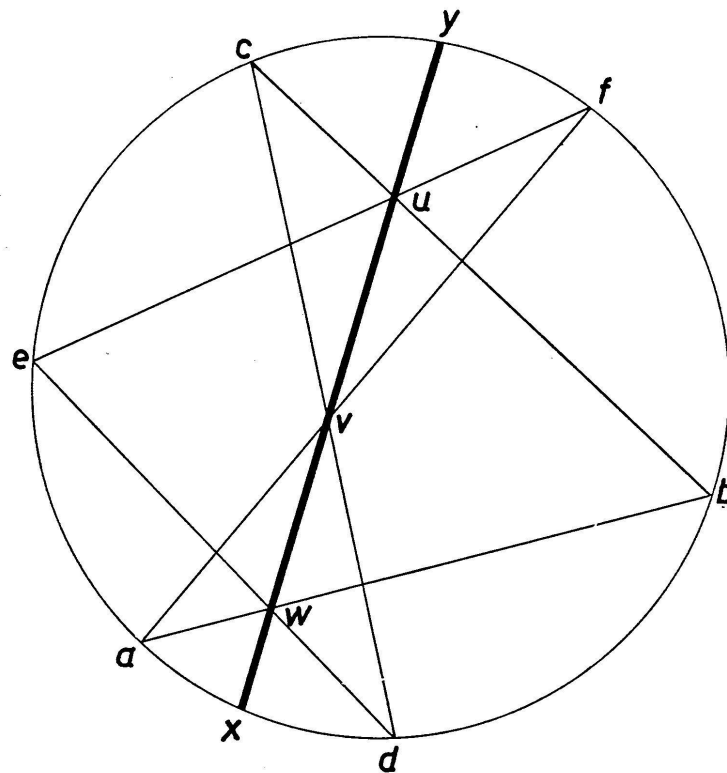


Abb. 16.

Pascalscher Lehrsatz.

Folglich ist ihr Schnittpunkt  $u$  gekennzeichnet durch

$$u(bc - ef) = bc(e + f) - ef(b + c) ; \quad \bar{u}(bc - ef) = (b + c) - (e + f) .$$

Also ist die Fläche des Dreiecks  $(u, v, w)$  proportional zu

$$\begin{vmatrix} bc(e + f) - ef(b + c) , & (b + c) - (e + f) , & bc - ef \\ cd(f + a) - fa(c + d) , & (c + d) - (f + a) , & cd - fa \\ de(a + b) - ab(d + e) , & (d + e) - (a + b) , & de - ab \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} be, cf, da \\ 1 & 1 & 1 \\ b & f & d \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} (c - f) & (b - e) & 0 \\ 0 & -(a - d) & (c - f) \\ -(a - d) & 0 & -(b - e) \end{vmatrix} .$$

Die zweite Determinante dieser Produktdarstellung verschwindet identisch; also hat das Dreieck  $(u, v, w)$  die Fläche Null. Somit liegen die Punkte  $u, v, w$  wirklich in einer Geraden, wie behauptet.

Indem wir diese Kreisfigur aus einem Punkt, der nicht in der Kreisebene liegt, auf eine zur Kreisebene nicht parallele Ebene projizieren, erhalten wir daraus den allgemeinen PASCALschen Lehrsatz für Kegelschnitte.

(7, 5) Fassen wir etwa die Punkte  $e, c, a$  bzw.  $b, f, d$  als zusammengehörige Elemente einer Projektivität auf dem Kreisumfang auf, dann ist die PASCALSche Gerade  $(u, v, w)$  der Abb. 16 die Achse dieser Projektivität; ihre Schnittpunkte  $x, y$  mit dem Einheitskreis sind die Doppelemente der Projektivität.

Diese Eigenschaft verwenden wir z.B. zur Lösung der sog. OTTOJANOSchen Aufgabe <sup>21)</sup>:

*Gegeben sind ein Kreis und drei nicht auf seinem Umfang gelegene Punkte. Ein Sehnendreieck durch diese Punkte zu bestimmen.*

Der Kreis sei der Einheitskreis, die von einander verschiedenen Punkte seien  $p, q, r$ , die gesuchten Ecken des Dreiecks seien  $x, y, z$ . Es geht also um die Auflösung der drei Gleichungen

$$p + yz\bar{p} = y + z, \quad q + zx\bar{q} = z + x, \quad r + xy\bar{r} = x + y.$$

Vermöge der beiden ersten Gleichungen lässt sich  $x$  und  $y$  als linear-gebrochene Funktion von  $z$  ausdrücken; durch Einsetzen in die dritte Gleichung erhalten wir also eine quadratische Gleichung in  $z$ , die nach Division mit  $z$  auf die Form  $z + m\bar{z} = n$  gebracht werden kann und also eine Gerade darstellt. Deren Schnittpunkte mit dem Einheitskreis liefern die beiden gesuchten Werte  $z_1$  und  $z_2$ .

Im vorliegenden Fall konstruieren wir am zweckmäßigsten drei zusammengehörige Punktepaaire der durch die Anordnung

<sup>21)</sup> Das Problem stammt (für drei Punkte, die in einer Geraden liegen) von APOLLONIOS aus den verlorenen *Tactiones*, über die wir Näheres aus PAPPUS, *Collectiones*, VII, prop. 117 wissen. Das allgemeinere Problem wurde von G. CRAMER gestellt, dessen Schüler G. F. M. M. SALVEMINI DE CASTILLON seit 1742 an der Lösung arbeitete und 1776 eine elementargeometrische veröffentlichte. Das Problem für  $n$ -Ecke wurde von dem 16-jährigen A. GIORDANO aus Ottojano im Anschluß an PAPPUS gelöst. Vgl. M. BRÜCKNER, *Das Ottojanosche Problem*, Programm, Zwickau 1892 und TROPFKE <sup>19)</sup>, 125.

$z_1, p, y, r, x, q, z_2$  auf dem Kreisumfang bestimmten Projektivität. Die zusammengehörigen Punkte  $z_1$  und  $z_2$  bezeichnen wir bzw. mit  $e, c, a$  und  $b, f, d$ . Die Achse dieser Projektivität ist die oben erwähnte Gerade. Die Ausführung ist in Abb. 17 nur angedeutet, weil wohlbekannt.

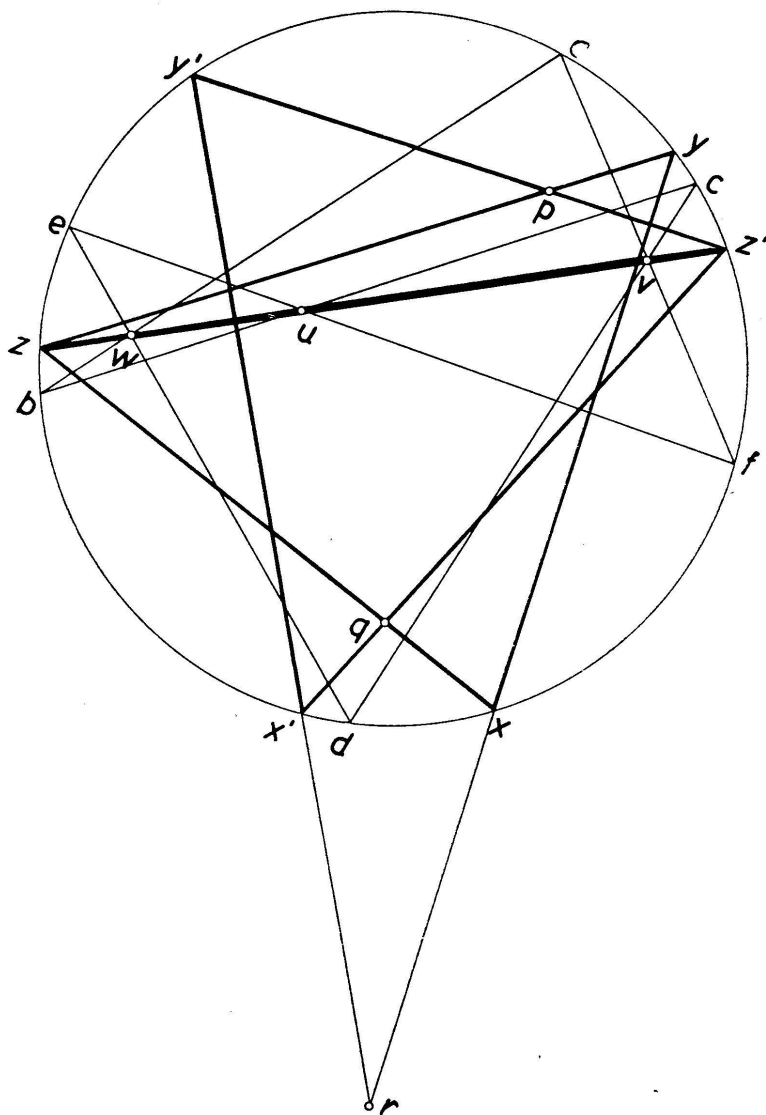


Abb. 17.

Ottojanos Problem.

Der rechnerische Ansatz zeigt, daß das Problem im Kreis vom Dreieck auf ein  $n$ -Eck übertragen werden kann und wiederum auf eine quadratische Gleichung führt. Durch passende Projektion läßt es sich allgemein für Kegelschnitte aussprechen und behandeln.

Dies waren einige Proben, an denen gezeigt werden sollte, wie sich der zu Anfang erwähnte Gedanke, komplexe Zahlen im Zusammenhang mit dem Einheitskreis zu verwenden, nutzbringend verwenden läßt. Es gibt sehr viele weitere einfache Anwendungen; da es nur um die Fixierung der Gedanken geht, soll nicht weiter auf sie eingegangen werden.

## SUR LES NOMBRES PREMIERS DE LA FORME $n^n + 1$

par W. SIERPIŃSKI (Varsovie).

(Reçu le 11 décembre 1957.)

Le but de cette Note est de démontrer le théorème suivant:

*Parmi les nombres ayant au plus trois cent milles chiffres (en système décimal) il n'y en a que trois, 2, 5 et 257 qui sont des nombres premiers de la forme  $n^n + 1$ , où  $n$  est un nombre naturel.*

DÉMONSTRATION. — Le nombre  $1^1 + 1 = 2$  est premier. Soit maintenant  $n$  un nombre naturel  $> 1$  et supposons que le nombre  $n^n + 1$  est premier. Si  $n$  avait un diviseur premier impair  $p$ , on aurait  $n = kp$ , où  $k$  est un nombre naturel et le nombre  $n^n + 1 = (n^k)^p + 1$  serait divisible par le nombre naturel  $n^k + 1$  qui est  $> 1$  et  $< n^n + 1$  (puisque  $k < kp = n$ ), ce qui est impossible. Donc  $n$  n'a aucun diviseur premier impair et, comme  $n > 1$ , on a  $n = 2^s$ , où  $s$  est un nombre naturel. Si  $s$  avait un diviseur premier  $q$  impair, on aurait  $s = kq$ , où  $k$  est un nombre naturel, et le nombre  $n^n + 1 = 2^{sn} + 1 = (2^{kn})^q + 1$  serait divisible par le nombre naturel  $2^{kn} + 1$  qui est  $> 1$  et  $< n^n + 1$  (puisque  $2^{kn} < 2^{knq} = n^n$ ), ce qui est impossible. Le nombre  $s$  n'a donc aucun diviseur premier impair, donc  $s = 2^m$ , où  $m$  est un entier  $\geq 0$ .