3. L'intégration des équations de MAXWELL.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **4 (1958)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

$$\nabla_\alpha G^\alpha{}_\beta = J_\beta \tag{2.11}$$

où J_β est le vecteur courant électrique généralisé. En tenant compte des valeurs des composantes de $\vec{J}$ dans le repère propre, on est conduit à faire l'hypothèse

$$J_\beta = \delta\, u_\beta + \sigma\, u^\alpha\, H_{\alpha\beta}\,. \tag{2.12}$$

Le vecteur $\vec{J}$ possède ainsi une composante $\delta\vec{u}$ colinéaire à $\vec{u}$ et une composante $\Gamma_\alpha = u^\rho\, H_{\rho\alpha}$ orthogonale à $\vec{u}$. La première représente le courant de convection et la seconde, le courant de conduction. δ sera appelé *densité propre de charge électrique.*

Les équations (2. 10) peuvent encore s'écrire

$$\nabla_\alpha H_{\beta\gamma} + \nabla_\beta H_{\gamma\alpha} + \nabla_\gamma H_{\alpha\beta} = 0\,.$$

Elles expriment les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il existe localement un vecteur φ_α tel que $H_{\alpha\beta}$ soit son rotationnel

$$H_{\alpha\beta} = \partial_\alpha\, \varphi_\beta - \partial_\beta\, \varphi_\alpha\,.$$

Enfin, on démontre que les vecteurs

$$\mathcal{E}^\delta = \frac{1}{2}\,\eta^{\alpha\beta\gamma\delta}\,\nabla_\alpha H_{\beta\gamma} \qquad \mathcal{D}_\beta = \nabla_\alpha G^\alpha{}_\beta \tag{2.13}$$

qui figurent aux premiers membres des équations (2. 10), (2. 11) vérifient les identités

$$\nabla_\alpha \mathcal{E}^\alpha = 0 \qquad \nabla_\alpha \mathcal{D}^\alpha = 0 \tag{2.14}$$

dites conditions de conservation relatives aux équations de MAXWELL. Elles entraînent la conservation du courant électrique

$$\nabla_\alpha J^\alpha \equiv \nabla_\alpha \left(\delta\, u^\alpha + \sigma\, u_\rho\, H^{\rho\alpha}\right) = 0\,. \tag{2.15}$$

3. L'intégration des équations de MAXWELL.

En relativité générale, les équations de l'électromagnétisme sont constituées par l'ensemble des équations de MAXWELL et des équations d'EINSTEIN auquel s'ajoutent les conditions de conservation. Supposons que le milieu occupant le domaine D_4 considéré soit schématisé sous forme de fluide parfait chargé conducteur où l'on tient compte des phénomènes électromagnétiques et thermodynamiques. Dans ce cas on peut établir l'expression du tenseur d'impulsion-énergie

$$T_{\alpha\beta} = (\rho + p)\, u_\alpha u_\beta - p g_{\alpha\beta} - (u_\alpha q_\beta + u_\beta q_\alpha) + \tau_{\alpha\beta} - (1 - \varepsilon\mu)\, \tau_{\alpha\rho} u^\rho u_\beta$$

$$\tau_{\alpha\beta} = \frac{1}{4} g_{\alpha\beta} \left(G_{\rho\sigma} H^{\rho\sigma}\right) - G_{\rho\alpha} H^\rho{}_\beta \tag{3.1}$$

$$q_\alpha = - \varkappa\, \partial_\rho \theta \left(g^\rho_\alpha - u^\rho u_\alpha\right)$$

où p est la pression et θ la température en chaque point du fluide, q_α le vecteur courant de chaleur qui satisfait à l'hypothèse de Fourier généralisée, $\varkappa$ représentant la conductivité thermique. ρ, p, θ sont liés par l'équation d'état

$$\rho = \varphi(p, \theta)\ . \tag{3.2}$$

Les équations de Maxwell-Einstein sont

$$\mathcal{E}^\delta = \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta\gamma\delta} \nabla_\alpha H_{\beta\gamma} = 0 \tag{3.3}$$

$$\mathcal{D}_\beta \equiv g^{\alpha\rho} \nabla_\alpha G_{\rho\beta} = \delta u_\beta + \sigma u^\alpha H_{\alpha\beta} \tag{3.4}$$

$$S_{\alpha\beta} = \chi T_{\alpha\beta} \tag{3.5}$$

auxquelles on adjoint le caractère unitaire de u^α, les conditions de conservation pour le tenseur d'impulsion-énergie, le vecteur courant de chaleur et le vecteur courant électrique

$$g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = +1 \tag{3.6}$$

$$\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0 \tag{3.7}$$

$$\nabla_\alpha q^\alpha = c \rho u^\alpha \partial_\alpha \theta - \frac{l}{\rho} u^\alpha \partial_\alpha \rho + J^\alpha H_{\alpha\beta} u^\beta \tag{3.8}$$

$$\nabla_\alpha \left(\delta u^\alpha + \sigma u_\alpha H^{\rho\alpha}\right) = 0\ . \tag{3.9}$$

(3. 8) est l'équation de Fourier généralisée où c et l représentent respectivement la chaleur spécifique à volume constant et la chaleur de dilatation du fluide. Les équations (3.6), (3.7), (3. 8) constituent un système différentiel aux lignes de courant du fluide.

Les scalaires $\varkappa$, c, l, ε, μ, σ qui caractérisent le fluide sont supposés donnés. Les variables de champ sont constituées par l'ensemble $\mathcal{G}$ ($g_{\alpha\beta}$, $H_{\alpha\beta}$, θ, u^α, p, δ). Le système des équations de MAXWELL-EINSTEIN présente, comme nous allons le voir, le caractère hyperbolique normal. On peut envisager le problème de leur intégration par une étude élémentaire au moyen d'une analyse du problème de Cauchy.

PROBLÈME. — *Etant donnés sur une hypersurface S les potentiels $g_{\alpha\beta}$ et leurs dérivées premières, le champ de température θ et ses dérivées premières, et le champ électromagnétique par les $H_{\alpha\beta}$, déterminer au voisinage de S les divers champs supposés satisfaire aux équations de* MAXWELL-EINSTEIN.

Il nous suffira d'étudier la possibilité de calculer sur S les valeurs des divers champs et de leurs dérivées successives. Nous supposerons les $g_{\alpha\beta}$ de classe (C^1, C^3 par morceaux), les $H_{\alpha\beta}$ de classe (C^0, C^2 par morceaux) et θ de classe (C^2, C^4 par morceaux).

Sur l'hypersurface S représentée localement par $x^0 = 0$, les données de Cauchy sont les valeurs des quantités $\mathcal{C}$ ($g_{\alpha\beta}$, $\partial_0 g_{\alpha\beta}$; θ, $\partial_0\theta$; $H_{\alpha\beta}$). Nous désignerons par d.C les données de Cauchy ou des quantités qui peuvent s'en déduire par des opérations algébriques et des dérivations le long de S. Si l'on cherche à mettre en évidence les dérivées $\partial_{00} g_{\alpha\beta}$, $\partial_0 H_{\alpha\beta}$ dans les équations de MAXWELL-EINSTEIN, on est conduit à remplacer ces équations par le système équivalent composé des groupes d'équations

$$S^0_{\ \alpha} = \chi\, T^0_{\ \alpha} \tag{3.10}$$

$$\mathcal{E}^0 \equiv \frac{1}{2}\,\eta^{ijk0}\,\partial_i H_{jk} = 0 \tag{3.11}$$

$$\mathcal{D}^0 = \delta\, u^0 + \sigma\, u_\alpha H^{\alpha 0} \tag{3.12}$$

où les quantités $S^0_{\ \alpha}$, $\mathcal{E}^0$ ont des valaurs connues sur S et la quantité $\mathcal{D}^0$ ne dépend pas des $\partial_0 u^\alpha$ et $\partial_0 H_{\alpha\beta}$, et de

$$R_{ij} = -\frac{1}{2} g^{00}\,\partial_{00}\, g_{ij} + F_{ij}\,(d.C) = \chi\left(T_{ij} - \frac{1}{2}\, T g_{ij}\right) \tag{3.13}$$

$$\mathcal{E}^k \equiv \frac{1}{2}\,\eta^{0ijk}\,\partial_0 H_{ij} + \psi^k\,(d.C) = 0 \tag{3.14}$$

$$\mathcal{D}_i \doteq \frac{1}{\mu}[g^{00} - (1 - \varepsilon\mu)\, u^0 u^0]\, \partial_0 H_{0i} + \frac{1}{\mu}[g^{0j} - (1 - \varepsilon\mu)\, u^0 u^j]\, \partial_0 H_{ji} +$$

$$+ \Phi_i (d.C\,,\ \partial_0 u^\alpha) = \delta u_i + \sigma u^\alpha H_{\alpha i}\,. \tag{3.15}$$

Une condition nécessaire pour que le problème de Cauchy soit possible est que les équations (3.10), (3.11), (3.12) soient satisfaites sur S par les données de Cauchy. S'il en est ainsi, en tenant compte de l'équation d'état et du caractère unitaire de u^α, on peut calculer les quantités u^α, p à l'aide des équations (3. 10). L'équation (3. 11) exprime qu'il existe un potentiel vecteur local pour H_{ij} sur S. L'équation (3.12) donne la valeur de δ.

Les équations (3. 13) déterminent alors les valeurs sur S de $\partial_{00} g_{ij}$ si $g^{00} \neq 0$. Pour avoir les valeurs de $\partial_0 H_{\alpha\beta}$, il faut connaître celles de $\partial_0 u^\alpha$. Ce sont les équations (3.6), (3.7), (3.8) qui fournissent les $\partial_0 u^\alpha$ en même temps que les $\partial_0 p$ et $\partial_{00}\theta$. Les équations (3.14) donnent les valeurs de $\partial_0 H_{ji}$ et les équations (3.15) donnent les valeurs de $\partial_0 H_{0i}$ sur S si $g^{00} - (1 - \varepsilon\mu)\, u^0 u^0 \neq 0$. Enfin l'équation (3.9) détermine la valeur de $\partial_0 \delta$ si $u^0 \neq 0$.

Si l'hypersurface S portant les données de Cauchy $\mathcal{C}$ n'est pas exceptionnelle, il résulte de l'analyse précédente que les quantités $\partial_{00}g_{ij}$, $\partial_0 H_{\alpha\beta}$, $\partial_{00}\theta$, $\partial_0 u^\alpha$, $\partial_0 p$, $\partial_0\delta$ sont bien déterminées et nécessairement continues à la traversée de l'hypersurface S. Les mêmes conclusions s'étendent aux dérivées d'ordre supérieur de $\mathcal{G}$ ($g_{\alpha\beta}$, $H_{\alpha\beta}$, θ, u^α, p, δ) si on suppose les données dérivables à un ordre supérieur à celui de nos hypothèses.

Soit maintenant une solution $\mathcal{G}$ des équations du champ correspondant aux données de Cauchy $\mathcal{C}$ vérifiant les équations (3.10), (3.11), (3.12) qui peuvent encore s'écrire

$$Q^0{}_\alpha = 0 \qquad \mathcal{E}^0 = 0 \qquad P^0 = 0$$

où l'on pose $Q_{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta} - \chi\, T_{\alpha\beta}$ et $P_\alpha = \mathcal{D}_\alpha - (\delta u_\alpha + \sigma u^\rho H_{\rho\alpha})$. En vertu du caractère conservatif des premiers membres des équations d'Einstein et de Maxwell, on a

$$\nabla_\alpha Q^\alpha{}_\beta = 0 \qquad \nabla_\alpha \mathcal{E}^\alpha = 0 \qquad \nabla_\alpha P^\alpha = 0\,.$$

Compte tenu des équations (3. 13), (3. 14), (3. 15), les identités précédentes se réduisent aux équations

$$g^{00}\,\partial_0\,Q^0{}_\alpha = A^{i\beta}{}_\alpha\,\partial_i\,Q^0{}_\beta + B^\beta{}_\alpha\,Q^0{}_\beta$$

$$\partial_0\,P^0 = C^i\,\partial_i\,P^0 + \left(\partial_i\,C^i - \Gamma^\alpha_{\alpha\beta}\,C^\beta\right)P^0$$

$$\partial_0\,\mathcal{E}^0 = -\,\Gamma^\alpha_{\alpha 0}\,\mathcal{E}^0$$

où les $A^{i\beta}{}_\alpha$, $B^\beta{}_\alpha$, C^α sont des fonctions continues. Ces équations sont linéaires et homogènes par rapport aux inconnues $Q^0{}_\alpha$, P^0, $\mathcal{E}^0$. Comme $Q^0{}_\alpha = P^0 = \mathcal{E}^0 = 0$ sur S, elles n'admettent pas d'autre solution que la solution identiquement nulle. Il en résulte que si les équations (3. 10), (3. 11), (3. 12) sont vérifiées sur S par les données de Cauchy $\mathcal{C}$, elles sont également vérifiées dans tout le domaine d'espace-temps considéré par la solution des équations du champ.

Le problème de l'intégration des équations du champ consiste finalement dans le choix des données de Cauchy $\mathcal{C}$ rendant compatibles les équations (3. 10), (3. 11), (3. 12) qui permettent de calculer u^α, p, δ, puis dans l'intégration du système des équations (3. 13), (3. 14), (3. 15) et (3. 6), (3. 7), (3. 8), (3. 9) qui permettent d'étudier l'évolution des champs $\mathcal{G}$ ($g_{\alpha\beta}$, $H_{\alpha\beta}$, θ, u^α, p, δ).

II. Etude des caractéristiques des équations de Maxwell

4. Les variétés caractéristiques des équations de MAXWELL.

Dans l'analyse du problème de Cauchy, on met en évidence quatre sortes de variétés exceptionnelles:

1) les variétés $g^{00} = 0$ tangentes aux cônes élémentaires,

2) les variétés qui généralisent les fronts d'ondes hydrodynamiques,

3) les variétés engendrées par les lignes de courant,

4) les variétés $g^{00} - (1 - \varepsilon\mu)\,u^0\,u^0 = 0$ que nous allons étudier.