

# I. Inductions électromagnétiques ET ÉQUATIONS RELATIVISTES DE L'ÉLECTROMAGNÉTISME

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **4 (1958)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

repérage de l'espace et du temps, il est naturel d'avoir recours à une variété  $V_4$  à quatre dimensions, trois d'espace et une de temps et qui sera telle qu'à chacun de ses points corresponde un événement déterminé. Cette variété est la variété *espace-temps* de la théorie de la relativité. On la rapporte à des systèmes de coordonnées curvilignes quelconques et on y cherche une représentation tensorielle des lois physiques<sup>1)</sup>. Aussi nous sera-t-il utile de rappeler certaines définitions classiques de la théorie de la relativité; mais nous supposerons connue la théorie des espaces de Riemann<sup>2)</sup>. Nous cherchons à préciser la notion d'inductions électromagnétiques dans le nouveau mode de représentation afin de formuler d'une manière correcte les équations correspondantes de la théorie de MAXWELL. C'est ce qui va faire l'objet de la première partie de notre exposé. Nous continuerons par une étude des caractéristiques de ces équations en établissant que les rayons électromagnétiques sont les géodésiques de longueur nulle d'une variété riemannienne associée  $\bar{V}_4$ . L'étude géométrique des rayons électromagnétiques dans l'espace à trois dimensions fournira l'énoncé du principe de FERMAT, dont l'existence est liée à celle d'univers stationnaire et de mouvements permanents.

Nous utiliserons les symboles  $\nabla_\alpha$  pour désigner les dérivées covariantes et  $\partial_\alpha$  pour désigner les dérivées partielles ( $\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}$ ).

## I. INDUCTIONS ÉLECTROMAGNÉTIQUES ET ÉQUATIONS RELATIVISTES DE L'ÉLECTROMAGNÉTISME

### 1. La variété espace-temps.

Dans la théorie de la relativité générale, l'espace-temps est une variété différentiable à quatre dimensions  $V_4$  de classe de différentiabilité  $C^2$ ,  $C^4$  par morceaux, sur laquelle est définie une métrique riemannienne  $ds^2$  de type hyperbolique normal,

1) Cette représentation indépendante du mode de repérage dans la variété  $V_4$  a conduit historiquement à une meilleure intelligence des phénomènes de l'électrodynamique des corps en mouvement.

2) Lire par exemple A. LICHNEROWICZ, *Eléments de calcul tensoriel* (A. Colin, Paris, 1950).

à un carré positif et trois carrés négatifs. Cette métrique dite *métrique d'univers* a, dans un système de coordonnées admissibles  $(x^\alpha)$ , pour expression locale

$$(1.1) \quad ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3).$$

La variété  $V_4$  possède en chaque point un espace vectoriel tangent du type de MINKOWSKI.

L'équation  $ds^2 = 0$  définit en chaque point  $x$  de  $V_4$  un cône réel  $C_x$  de directions tangentes à  $V_4$  dit *cône élémentaire* en  $x$ . Une direction  $\vec{dx}$  en  $x$  est dite orientée dans le temps ou dans l'espace selon qu'elle est intérieure ( $ds^2 > 0$ ) ou extérieure ( $ds^2 < 0$ ) au cône  $C_x$ . Une courbe  $\Gamma$  de  $V_4$  est orientée dans le temps si les tangentes en ses différents points sont orientées dans le temps. Un 3-plan tangent en  $x$  à  $V_4$  est orienté dans l'espace si toutes ses directions sont orientées dans l'espace. Il est orienté dans le temps s'il admet des directions orientées dans le temps. Une hypersurface  $S$  à trois dimensions est orientée dans le temps ou dans l'espace selon que ses éléments plans tangents aux différents points sont orientés dans le temps ou dans l'espace. Pour qu'une hypersurface  $S$ , définie localement par  $f(x^\alpha) = 0$ , soit orientée dans le temps, il faut et il suffit que

$$\Delta_1 f \equiv g^{\alpha\beta} \partial_\alpha f \partial_\beta f < 0.$$

Pour qu'elle soit orientée dans l'espace, il faut et il suffit que  $\Delta_1 f > 0$ .

Les dix coefficients  $g_{\alpha\beta}$  sont dits les *potentiels de gravitation* relativement au système de coordonnées locales  $(x^\alpha)$ , parce que leurs écarts à la géométrie euclidienne tangente rendent compte de la gravitation. Pour limiter la généralité de la métrique dans le cadre de la relativité générale, le tenseur  $g_{\alpha\beta}$  est astreint à vérifier le système des dix équations d'EINSTEIN

$$S_{\alpha\beta} = \chi T_{\alpha\beta}$$

qui généralisent les équations de LAPLACE-POISSON.

$S_{\alpha\beta}$  est le tenseur d'EINSTEIN de la variété riemannienne  $V_4$ . Il est d'origine géométrique. La description de l'état de la

distribution énergétique est faite par le tenseur d'impulsion-énergie  $T_{\alpha\beta}$ , suivant des schémas de type hydrodynamique. On dit qu'un domaine  $D_4$  de l'espace-temps est occupé par une distribution énergétique schématisée sous forme de *fluide*, si sur le domaine  $D_4$  sont définis

- 1) un champ de scalaire  $\rho$  dit *densité propre* du fluide,
- 2) un champ de vecteur unitaire orienté dans le temps  $\vec{u}$  dit *vecteur vitesse unitaire* dont les trajectoires sont appelées les lignes de courant du fluide.

On appellera *repère propre* en un point  $x$  du domaine  $D_4$  un repère orthonormé dont le premier vecteur orienté dans le temps coïncide avec le vecteur vitesse unitaire  $\vec{u}$  et dont les trois autres vecteurs orientés dans l'espace définissent le tri-plan  $\pi_x$  orthogonal à  $\vec{u}$  qu'on appelle *espace associé* à la direction de temps  $\vec{u}$ .

Le repère propre précédent joue le rôle d'un repère galiléen local par rapport auquel la matière est au repos. Il suffit d'écrire, dans ce repère, les équations relatives à la matière au repos. Puis, par un changement de repère, on en déduit l'expression générale invariante des équations relativement au repère naturel associé à un système de coordonnées locales quelconque. Inversement, l'interprétation physique des équations se fait relativement au repère propre dans l'espace tangent au point considéré. On peut aussi considérer un espace-temps de la relativité restreinte rapporté à un système de coordonnées galiléennes réduites dans lequel la métrique a pour expression

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2$$

où  $x^0 = ct$ ,  $c$  désignant la vitesse de propagation de la lumière dans le vide.

## 2. Inductions électromagnétiques et équations de MAXWELL.

La théorie de MAXWELL pour la matière fait intervenir un champ électromagnétique variable avec le temps, défini par quatre vecteurs d'espace: champ électrique  $\vec{E}$  et induction

magnétique  $\vec{B}$ , champ magnétique  $\vec{H}$  et induction électrique  $D$ . Le champ électromagnétique ainsi défini est régi par les équations de MAXWELL qui peuvent s'écrire dans un système d'unités convenables, relativement à un repère lié à la matière au point considéré

$$(2.1) \quad \begin{cases} \operatorname{rot} \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \end{cases}$$

$$(2.2) \quad \begin{cases} \operatorname{rot} \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{\Gamma} \\ \operatorname{div} \vec{D} = \delta. \end{cases}$$

Ces équations établissent le lien entre les champs et inductions  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ ,  $\vec{D}$ ,  $\vec{B}$  d'une part et la densité de charge  $\delta$  et le courant de conduction  $\vec{\Gamma}$  d'autre part. Ces diverses quantités sont de plus liées par les relations

$$(2.3) \quad \vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

$$(2.4) \quad \vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$(2.5) \quad \vec{\Gamma} = \sigma \vec{E}$$

où  $\epsilon$ ,  $\mu$ ,  $\sigma$  représentent respectivement le pouvoir diélectrique, la perméabilité magnétique et la conductivité électrique du milieu considéré. Le milieu est dit *isotrope* si  $\epsilon$ ,  $\mu$ ,  $\sigma$  sont des scalaires. C'est ce que nous supposerons dans la suite.

La représentation vectorielle précédente n'est bien adaptée qu'à l'étude des transformations consistant en un déplacement purement spatial et un changement d'origine pour le temps. Pour avoir une représentation tensorielle indépendante du mode de repérage dans la variété espace-temps  $V_4$ , on peut généraliser les équations de MAXWELL de la manière suivante.

Considérons un domaine  $D_4$  de l'espace-temps  $V_4$  occupé par un milieu matériel chargé et conducteur, siège des phénomènes électromagnétiques. Soit  $x$  un point de  $D_4$  et  $R$  le repère propre associé. En admettant que les équations rigoureuses du champ électromagnétique se réduisent localement dans le repère propre  $R$  aux équations classiques (2.1), (2.2) nous

sommes amenés à introduire deux tenseurs antisymétriques d'ordre 2,  $H_{\alpha\beta}$  et  $G_{\alpha\beta}$ , dont les composantes relatives au repère propre sont

$$(H_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ -E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ -E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (G_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & D_1 & D_2 & D_3 \\ -D_1 & 0 & H_3 & -H_2 \\ -D_2 & -H_3 & 0 & H_1 \\ -D_3 & H_2 & -H_1 & 0 \end{pmatrix}$$

et vérifient les relations

$$(2.6) \quad G_{0i} = \varepsilon H_{0i} \quad \mu G_{ij} = H_{ij}.$$

Sur ces formules et dans la suite, les indices latins prennent les valeurs 1, 2, 3 tandis que les indices grecs prennent les valeurs 0, 1, 2, 3.

Nous introduisons les tenseurs adjoints  $\overset{*}{G}_{\alpha\beta}$  et  $\overset{*}{H}_{\alpha\beta}$  définis par

$$(2.7) \quad \overset{*}{H}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta\gamma\delta} H_{\gamma\delta} \quad \overset{*}{G}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta\gamma\delta} G_{\gamma\delta}$$

où  $\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}$  est le tenseur complètement antisymétrique attaché à la forme élément de volume de  $V_4$ . Les relations (2.6) peuvent alors s'écrire sous la forme invariante

$$(2.8) \quad G_{\alpha\beta} u^\alpha = \varepsilon H_{\alpha\beta} u^\alpha \\ \mu \overset{*}{G}_{\alpha\beta} u^\alpha = \overset{*}{H}_{\alpha\beta} u^\alpha.$$

Ces relations sont appelées les *équations de liaison*. Elles montrent que les deux champs de tenseurs  $H_{\alpha\beta}$  et  $G_{\alpha\beta}$  ne sont pas indépendants l'un de l'autre. On peut exprimer les  $G_{\alpha\beta}$  en fonction des  $H_{\alpha\beta}$ . Un calcul donne

$$(2.9) \quad G_{\alpha\beta} = \frac{1}{\mu} H_{\alpha\beta} + \frac{1 - \varepsilon \mu}{\mu} (H_{\sigma\alpha} u^\sigma u_\beta - H_{\sigma\beta} u^\sigma u_\alpha).$$

Cela posé, le champ électromagnétique doit satisfaire aux équations de MAXWELL qui s'écrivent dans la variété espace-temps

$$(2.10) \quad \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta\gamma\delta} \nabla_\alpha H_{\beta\gamma} = 0$$

$$(2.11) \quad \nabla_{\alpha} G^{\alpha}_{\beta} = J_{\beta}$$

où  $J_{\beta}$  est le vecteur courant électrique généralisé. En tenant compte des valeurs des composantes de  $\vec{J}$  dans le repère propre, on est conduit à faire l'hypothèse

$$(2.12) \quad J_{\beta} = \delta u_{\beta} + \sigma u^{\alpha} H_{\alpha\beta}$$

Le vecteur  $\vec{J}$  possède ainsi une composante  $\delta\vec{u}$  colinéaire à  $\vec{u}$  et une composante  $\Gamma_{\alpha} = u^{\rho} H_{\rho\alpha}$  orthogonale à  $\vec{u}$ . La première représente le courant de convection et la seconde, le courant de conduction.  $\delta$  sera appelé *densité propre de charge électrique*.

Les équations (2. 10) peuvent encore s'écrire

$$\nabla_{\alpha} H_{\beta\gamma} + \nabla_{\beta} H_{\gamma\alpha} + \nabla_{\gamma} H_{\alpha\beta} = 0 ;$$

Elles expriment les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il existe localement un vecteur  $\varphi_{\alpha}$  tel que  $H_{\alpha\beta}$  soit son rotationnel

$$H_{\alpha\beta} = \partial_{\alpha} \varphi_{\beta} - \partial_{\beta} \varphi_{\alpha} .$$

Enfin, on démontre que les vecteurs

$$(2.13) \quad \mathcal{E}^{\delta} = \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta\gamma\delta} \nabla_{\alpha} H_{\beta\gamma} \quad \mathcal{O}_{\beta} = \nabla_{\alpha} G^{\alpha}_{\beta}$$

qui figurent aux premiers membres des équations (2. 10), (2. 11) vérifient les identités

$$(2.14) \quad \nabla_{\alpha} \mathcal{E}^{\alpha} = 0 \quad \nabla_{\alpha} \mathcal{O}^{\alpha} = 0$$

dites conditions de conservation relatives aux équations de MAXWELL. Elles entraînent la conservation du courant électrique

$$(2.15) \quad \nabla_{\alpha} J^{\alpha} \equiv \nabla_{\alpha} (\delta u^{\alpha} + \sigma u_{\rho} H^{\rho\alpha}) = 0 .$$

### 3. L'intégration des équations de MAXWELL.

En relativité générale, les équations de l'électromagnétisme sont constituées par l'ensemble des équations de MAXWELL et des équations d'EINSTEIN auquel s'ajoutent les conditions de

conservation. Supposons que le milieu occupant le domaine  $D_4$  considéré soit schématisé sous forme de fluide parfait chargé conducteur où l'on tient compte des phénomènes électromagnétiques et thermodynamiques. Dans ce cas on peut établir l'expression du tenseur d'impulsion-énergie

$$(3.1) \quad \begin{aligned} T_{\alpha\beta} &= (\rho + p) u_\alpha u_\beta - p g_{\alpha\beta} - (u_\alpha q_\beta + u_\beta q_\alpha) + \tau_{\alpha\beta} - (1 - \varepsilon\mu) \tau_{\alpha\rho} u^\rho u_\beta \\ \tau_{\alpha\beta} &= \frac{1}{4} g_{\alpha\beta} (G_{\rho\sigma} H^{\rho\sigma}) - G_{\rho\alpha} H^\rho{}_\beta \\ q_\alpha &= -\kappa \partial_\rho \theta (g^\rho{}_\alpha - u^\rho u_\alpha) \end{aligned}$$

où  $p$  est la pression et  $\theta$  la température en chaque point du fluide,  $q_\alpha$  le vecteur courant de chaleur qui satisfait à l'hypothèse de Fourier généralisée,  $\kappa$  représentant la conductivité thermique.  $\rho$ ,  $p$ ,  $\theta$  sont liés par l'équation d'état

$$(3.2) \quad \rho = \varphi(p, \theta).$$

Les équations de MAXWELL-EINSTEIN sont

$$(3.3) \quad \mathcal{E}^\delta = \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta\gamma\delta} \nabla_\alpha H_{\beta\gamma} = 0$$

$$(3.4) \quad \mathcal{D}_\beta \equiv g^{\alpha\rho} \nabla_\alpha G_{\rho\beta} = \delta u_\beta + \sigma u^\alpha H_{\alpha\beta}$$

$$(3.5) \quad S_{\alpha\beta} = \chi T_{\alpha\beta}$$

auxquelles on adjoint le caractère unitaire de  $u^\alpha$ , les conditions de conservation pour le tenseur d'impulsion-énergie, le vecteur courant de chaleur et le vecteur courant électrique

$$(3.6) \quad g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = +1$$

$$(3.7) \quad \nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$$

$$(3.8) \quad \nabla_\alpha q^\alpha = c \rho u^\alpha \partial_\alpha \theta - \frac{l}{\rho} u^\alpha \partial_\alpha \rho + J^\alpha H_{\alpha\beta} u^\beta$$

$$(3.9) \quad \nabla_\alpha (\delta u^\alpha + \sigma u_\alpha H^{\rho\alpha}) = 0.$$

(3. 8) est l'équation de FOURIER généralisée où  $c$  et  $l$  représentent respectivement la chaleur spécifique à volume constant et la chaleur de dilatation du fluide. Les équations (3.6), (3.7), (3. 8) constituent un système différentiel aux lignes de courant du fluide.



Les scalaires  $\kappa$ ,  $c$ ,  $l$ ,  $\varepsilon$ ,  $\mu$ ,  $\sigma$  qui caractérisent le fluide sont supposés donnés. Les variables de champ sont constituées par l'ensemble  $\mathcal{G}$  ( $g_{\alpha\beta}$ ,  $H_{\alpha\beta}$ ,  $\theta$ ,  $u^\alpha$ ,  $p$ ,  $\delta$ ). Le système des équations de MAXWELL-EINSTEIN présente, comme nous allons le voir, le caractère hyperbolique normal. On peut envisager le problème de leur intégration par une étude élémentaire au moyen d'une analyse du problème de Cauchy.

PROBLÈME. — *Etant donnés sur une hypersurface  $S$  les potentiels  $g_{\alpha\beta}$  et leurs dérivées premières, le champ de température  $\theta$  et ses dérivées premières, et le champ électromagnétique par les  $H_{\alpha\beta}$ , déterminer au voisinage de  $S$  les divers champs supposés satisfaire aux équations de MAXWELL-EINSTEIN.*

Il nous suffira d'étudier la possibilité de calculer sur  $S$  les valeurs des divers champs et de leurs dérivées successives. Nous supposerons les  $g_{\alpha\beta}$  de classe ( $C^1$ ,  $C^3$  par morceaux), les  $H_{\alpha\beta}$  de classe ( $C^0$ ,  $C^2$  par morceaux) et  $\theta$  de classe ( $C^2$ ,  $C^4$  par morceaux).

Sur l'hypersurface  $S$  représentée localement par  $x^0 = 0$ , les données de Cauchy sont les valeurs des quantités  $\mathcal{C}$  ( $g_{\alpha\beta}$ ,  $\partial_0 g_{\alpha\beta}$ ;  $\theta$ ,  $\partial_0 \theta$ ;  $H_{\alpha\beta}$ ). Nous désignerons par d.C les données de Cauchy ou des quantités qui peuvent s'en déduire par des opérations algébriques et des dérivations le long de  $S$ . Si l'on cherche à mettre en évidence les dérivées  $\partial_{00} g_{\alpha\beta}$ ,  $\partial_0 H_{\alpha\beta}$  dans les équations de MAXWELL-EINSTEIN, on est conduit à remplacer ces équations par le système équivalent composé des groupes d'équations

$$(3.10) \quad S^0_\alpha = \chi T^0_\alpha$$

$$(3.11) \quad \mathcal{E}^0 \equiv \frac{1}{2} \eta^{ijk0} \partial_i H_{jk} = 0$$

$$(3.12) \quad \mathcal{D}^0 = \delta u^0 + \sigma u_\alpha H^{\alpha 0}$$

où les quantités  $S^0_\alpha$ ,  $\mathcal{E}^0$  ont des valeurs connues sur  $S$  et la quantité  $\mathcal{D}^0$  ne dépend pas des  $\partial_0 u^\alpha$  et  $\partial_0 H_{\alpha\beta}$ , et de

$$(3.13) \quad R_{ij} = -\frac{1}{2} g^{00} \partial_{00} g_{ij} + F_{ij} (d.C) = \chi \left( T_{ij} - \frac{1}{2} T g_{ij} \right)$$

$$(3.14) \quad \mathcal{E}^k \equiv \frac{1}{2} \eta^{0ijk} \partial_0 H_{ij} + \psi^k (d.C) = 0$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_i \equiv \frac{1}{\mu} [g^{00} - (1 - \varepsilon \mu) u^0 u^0] \partial_0 H_{0i} + \frac{1}{\mu} [g^{0j} - (1 - \varepsilon \mu) u^0 u^j] \partial_0 H_{ji} + \\ (3.15) \quad + \Phi_i(d.C., \partial_0 u^\alpha) = \delta u_i + \sigma u^\alpha H_{\alpha i}. \end{aligned}$$

Une condition nécessaire pour que le problème de Cauchy soit possible est que les équations (3.10), (3.11), (3.12) soient satisfaites sur S par les données de Cauchy. S'il en est ainsi, en tenant compte de l'équation d'état et du caractère unitaire de  $u^\alpha$ , on peut calculer les quantités  $u^\alpha$ ,  $p$  à l'aide des équations (3.10). L'équation (3.11) exprime qu'il existe un potentiel vecteur local pour  $H_{ij}$  sur S. L'équation (3.12) donne la valeur de  $\delta$ .

Les équations (3.13) déterminent alors les valeurs sur S de  $\partial_{00} g_{ij}$  si  $g^{00} \neq 0$ . Pour avoir les valeurs de  $\partial_0 H_{\alpha\beta}$ , il faut connaître celles de  $\partial_0 u^\alpha$ . Ce sont les équations (3.6), (3.7), (3.8) qui fournissent les  $\partial_0 u^\alpha$  en même temps que les  $\partial_0 p$  et  $\partial_{00} \theta$ . Les équations (3.14) donnent les valeurs de  $\partial_0 H_{ji}$  et les équations (3.15) donnent les valeurs de  $\partial_0 H_{0i}$  sur S si  $g^{00} - (1 - \varepsilon \mu) u^0 u^0 \neq 0$ . Enfin l'équation (3.9) détermine la valeur de  $\partial_0 \delta$  si  $u^0 \neq 0$ .

Si l'hypersurface S portant les données de Cauchy  $\mathcal{C}$  n'est pas exceptionnelle, il résulte de l'analyse précédente que les quantités  $\partial_{00} g_{ij}$ ,  $\partial_0 H_{\alpha\beta}$ ,  $\partial_{00} \theta$ ,  $\partial_0 u^\alpha$ ,  $\partial_0 p$ ,  $\partial_0 \delta$  sont bien déterminées et nécessairement continues à la traversée de l'hypersurface S. Les mêmes conclusions s'étendent aux dérivées d'ordre supérieur de  $\mathcal{G}$  ( $g_{\alpha\beta}$ ,  $H_{\alpha\beta}$ ,  $\theta$ ,  $u^\alpha$ ,  $p$ ,  $\delta$ ) si on suppose les données dérivables à un ordre supérieur à celui de nos hypothèses.

Soit maintenant une solution  $\mathcal{G}$  des équations du champ correspondant aux données de Cauchy  $\mathcal{C}$  vérifiant les équations (3.10), (3.11), (3.12) qui peuvent encore s'écrire

$$Q^\alpha_\alpha = 0 \quad \mathcal{E}^0 = 0 \quad P^0 = 0$$

où l'on pose  $Q_{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta} - \chi T_{\alpha\beta}$  et  $P_\alpha = \mathcal{Q}_\alpha - (\delta u_\alpha + \sigma u^\rho H_{\rho\alpha})$ . En vertu du caractère conservatif des premiers membres des équations d'EINSTEIN et de MAXWELL, on a

$$\nabla_\alpha Q^\alpha_\beta = 0 \quad \nabla_\alpha \mathcal{E}^\alpha = 0 \quad \nabla_\alpha P^\alpha = 0.$$

Compte tenu des équations (3. 13), (3. 14), (3. 15), les identités précédentes se réduisent aux équations

$$\begin{aligned} g^{00} \partial_0 Q^0_\alpha &= A^{i\beta}_\alpha \partial_i Q^0_\beta + B^\beta_\alpha Q^0_\beta \\ \partial_0 P^0 &= C^i \partial_i P^0 + (\partial_i C^i - \Gamma^\alpha_{\alpha\beta} C^\beta) P^0 \\ \partial_0 \mathcal{E}^0 &= - \Gamma^\alpha_{\alpha 0} \mathcal{E}^0 \end{aligned}$$

où les  $A^{i\beta}_\alpha$ ,  $B^\beta_\alpha$ ,  $C^\alpha$  sont des fonctions continues. Ces équations sont linéaires et homogènes par rapport aux inconnues  $Q^0_\alpha$ ,  $P^0$ ,  $\mathcal{E}^0$ . Comme  $Q^0_\alpha = P^0 = \mathcal{E}^0 = 0$  sur  $S$ , elles n'admettent pas d'autre solution que la solution identiquement nulle. Il en résulte que si les équations (3. 10), (3. 11), (3. 12) sont vérifiées sur  $S$  par les données de Cauchy  $\mathcal{C}$ , elles sont également vérifiées dans tout le domaine d'espace-temps considéré par la solution des équations du champ.

Le problème de l'intégration des équations du champ consiste finalement dans le choix des données de Cauchy  $\mathcal{C}$  rendant compatibles les équations (3. 10), (3. 11), (3. 12) qui permettent de calculer  $u^\alpha$ ,  $p$ ,  $\delta$ , puis dans l'intégration du système des équations (3. 13), (3. 14), (3. 15) et (3. 6), (3. 7), (3. 8), (3. 9) qui permettent d'étudier l'évolution des champs  $\mathcal{G}$  ( $g_{\alpha\beta}$ ,  $H_{\alpha\beta}$ ,  $\theta$ ,  $u^\alpha$ ,  $p$ ,  $\delta$ ).

## II. ETUDE DES CARACTÉRISTIQUES DES ÉQUATIONS DE MAXWELL

### 4. Les variétés caractéristiques des équations de MAXWELL.

Dans l'analyse du problème de Cauchy, on met en évidence quatre sortes de variétés exceptionnelles:

- 1) les variétés  $g^{00} = 0$  tangentes aux cônes élémentaires,
- 2) les variétés qui généralisent les fronts d'ondes hydrodynamiques,
- 3) les variétés engendrées par les lignes de courant,
- 4) les variétés  $g^{00} - (1 - \varepsilon\mu) u^0 u^0 = 0$  que nous allons étudier.