

## 5. The number of changes of sign.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **3 (1957)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Comparing (4.5) and (4.7) we see that

$$(4.8) \quad z_{1,2n} = u_{2n} = z_{0,2n} \quad \text{for } n \geq 1.$$

In like manner we can calculate  $z_{2,2n}, z_{3,2n}, \dots$  from the recursion formula

$$(4.9) \quad z_{k,2n} = \sum_{r=1}^{n-1} f_{2r} z_{k-1,2n-2r}, \quad k \geq 2, \quad n \geq 1.$$

which is proved exactly as (4.5). For  $k \geq 2$  the right side differs from the right side in (4.5) only in that the term  $r = n$  is absent, and therefore

$$(4.10) \quad z_{k,2n} = z_{1,2n} - f_{2n} = 2z_{1,2n} - z_{0,2n-2}, \quad n \geq 1.$$

From the last two relations we see directly by induction that for  $k \geq 2$  and  $n \geq 1$  we have the recursion formula

$$(4.11) \quad z_{k,2n} = 2z_{k-1,2n} - z_{k-2,2n-2}$$

If we write  $z_{k,2n} = 2^{k-2n} a_{k,2n}$  then (4.11) reduces to

$$(4.12) \quad a_{k-1,2n} = a_{k,2n} + a_{k-2,2n-2}$$

which is the well-known addition relation for binomial coefficients, and thus (4.2) holds.

This theorem has the following surprising

COROLLARY. For each  $n \geq 1$  we have

$$(4.13) \quad z_{0,2n} = z_{1,2n} > z_{2,2n} > z_{3,2n} > \dots > z_{n,2n}$$

Thus, independently of the number  $n$  of steps, the *most probable number of zeros* is 0, and the smaller the number, the more probable it is.

### 5. THE NUMBER OF CHANGES OF SIGN.

We say that in the sequence  $S_1, \dots, S_{2n}$  a *change of sign occurs at the place  $j$*  if  $S_{j-1}$  and  $S_{j+1}$  are of opposite signs. This requires that  $S_j = 0$ , and so  $j$  must be even. Given the first  $2n$  terms

of the sequence we can speak of changes of sign only at the places  $j \leq 2n - 2$ .

**THEOREM 3.** *Let  $c_{r, 2n}$  denote the probability that there exist exactly  $r$  indices  $j$  such that*

$$(5.1) \quad S_{j-1} S_{j+1} < 0, \quad 1 \leq j \leq 2n - 1.$$

*Then*

$$(5.2) \quad c_{r, 2n} = \frac{1}{2^{2n-2}} \binom{2n-1}{n-1-r}.$$

*Proof.* Let us say that two sequences  $S_1, \dots, S_m$  and  $S'_1, \dots, S'_m$  are *similar* if  $|S_j| = |S'_j|$  for  $j = 1, 2, \dots, m$ . Obviously  $-S_1, -S_2, \dots, -S_{2n}$  represents the only sequence similar to  $S_1, \dots, S_{2n}$  and such that changes of sign occur at the same places. On the other hand, if exactly  $k$  among the terms  $S_1, \dots, S_{2n-2}$  vanish, there exist exactly  $2^{k+1}$  sequences similar to the sequence  $S_1, \dots, S_{2n}$ . Out of  $k$  places we may choose  $r$  places in  $\binom{k}{r}$  different ways, and it is therefore seen that

$$(5.3) \quad \begin{aligned} c_{r, 2n} &= 2 \sum_{k=r}^{n-1} \binom{k}{r} 2^{-(k+1)} z_{k, 2n-2} \\ &= \frac{1}{2^{2n-2}} \sum_{k=r}^{n-1} \binom{k}{r} \binom{2n-2-k}{n-1} \end{aligned}$$

A well-known formula for binomial coefficients<sup>3</sup> which can be proved by induction now shows that (5.2) is true.

In (5.2) we recognize the binomial distribution and we have the obvious.

**COROLLARY:**

$$(5.4) \quad c_{0, 2n} > c_{1, 2n} > c_{2, 2n} > \dots > c_{n-1, 2n}.$$

## 6. THE EXPECTATIONS.

**THEOREM 4.** *Let  $Z_{2n}$  and  $C_{2n}$  denote, respectively, the number of zeros and the number of changes of sign among the terms  $S_1, \dots,$*

<sup>3</sup> See, for example, formula (9.14) of Chapter 2 of the book quoted above.