# Troisième exposé

on définit une solution de (10) égale à 1 pour $x = 0$, définie sur l'intervalle $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$, de partie réelle positive; de plus, elle reste continue si l'on pose $e\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -i$ et $e\left(\frac{\pi}{2}\right) = i$.

Prolongeons la définition de $e(x)$ à R en posant $e(x + \pi) = -e(x)$; on voit aussitôt que $e(x)$ est continue sur R; elle est dérivable, avec dérivée vérifiant (10), sauf peut-être aux points $\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi$, $k$ étant entier. Il est aisé de se défaire de cette restriction, en raisonnant, par exemple, comme suit:

La fonction $e\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - ie(x)$ est nulle, par exemple pour $x = -\frac{\pi}{4}$, donc étant solution de (10) pour $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, elle est nulle sur cet intervalle, donc aussi, par le prolongement, pour tout $x$ non multiple entier de $\frac{\pi}{2}$; donc, étant continue, elle est identiquement nulle; et, comme $e\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ est dérivable pour $x = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi$, $e(x)$ l'est aussi, avec la valeur correcte de la dérivée.

On a donc prouvé les théorèmes 3 et 4.

*Remarque.* — De $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$, on déduit

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{du}{1 + u^2},$$

d'où l'on déduit immédiatement $2 < \pi < 4$, et facilement $\pi = 3{,}1$ ...

*Autre remarque.* — Soit $r = u + iv$ un nombre complexe quelconque, la fonction exponentielle solution de (7) n'est autre que $e^{ux} e^{ivx}$, qu'on posera égal à $e^{rx}$; ceci définit, en faisant $x = 1$, $e^r$ pour $r$ complexe de façon compatible avec ce qui précède, avec (1) et avec le développement en série.

## Troisième exposé

La fonction de variable complexe

$$e^z = 1 + z + \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{6} z^3 + \ldots \tag{15}$$

est partout définie et vérifie l'identité différentielle

$$d\, e^z = e^z\, dz \tag{16}$$

*Théorème.* — Pour que les nombres complexes $x$ et $y$, ce dernier non nul, vérifient $y = e^x$, il faut et il suffit qu'il existe un chemin $c$ d'origine 1, d'extrémité $y$, évitant 0, tel que

$$\int_c \frac{du}{u} = x\,. \tag{17}$$

*Démonstration.* — « Il suffit »:

Soit $u = g\,(t)$ la fonction de $t\,(0 \leqslant t \leqslant 1)$ définissant le chemin $c$; $g$ est supposée non nulle, continue, et par morceaux continûment dérivable, avec $g\,(0) = 1$ et $g\,(1) = y$; par hypothèse, on a

$$x = \int_c \frac{du}{u} = \int_0^1 \frac{g'\,(t)}{g\,(t)}\, dt\,.$$

Posons, pour $0 \leqslant t \leqslant 1$,

$$v\,(t) = \int_0^t \frac{g'\,(t)}{g\,(t)}\, dt \qquad \text{et} \qquad f\,(t) = e^{v(t)}\,.$$

D'après (16), on a

$$f'\,(t)\, g\,(t) = f\,(t)\, g'\,(t)$$

donc le rapport $f\,(t)/g\,(t)$ est constant par morceaux, donc constant par continuité, donc égal à 1 puisque $f\,(0) = g\,(0) = 1$; de sorte qu'on a pour $t = 1$

$$y = g\,(1) = f\,(1) = e^x \qquad \text{c.q.f.d.}$$

« Il faut »:

Pour tout $x = a + ib$, il existe un chemin $c$ tel que (17); en effet, définissons $c$ comme composé d'un chemin $c'$ sur l'axe réel et d'un chemin $c''$ sur un cercle centré en 0; le choix de $c'$ pour que $\int_c \frac{du}{u} = a$ est possible puisque l'intégrale $\int \frac{du}{u}$ est divergente en 0 et à l'infini; d'autre part, si on paramètre un cercle centré à l'origine, privé de son point négatif, par

$$\mathrm{X} = \mathrm{R}\frac{1 - t^2}{1 + t^2} \quad \mathrm{Y} = \mathrm{R}\frac{2\,t}{1 + t^2} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \mathrm{X} + i\mathrm{Y} = \mathrm{R}\frac{1 + it}{1 - it}$$

on a, sur ce cercle

$$\int \frac{du}{u} = 2\,i \int \frac{dt}{1+t^2}$$

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+t^2}{dt} =$ est un nombre fini non nul, noté $\pi$, et l'intégrale sur le cercle entier vaut $2i\pi$; le choix de $c''$ pour que $\displaystyle\int_{c''} \frac{du}{u} = ib$ est donc toujours possible.

D'après « il suffit », l'extrémité $y$ du chemin $c$ tel que (17) est $e^x$.

*Remarque.* — Le chemin ainsi défini n'a pour extrémité 1 que si $x$ est multiple entier de $2i\pi$; donc ces nombres sont les seuls tels que $e^x = 1$.

*Autre remarque.* — Si

$$\int_c \frac{du}{u} = x\ , \quad \int_d \frac{du}{u} = y\ , \qquad \text{on a} \qquad \int_{c+e^x d} \frac{du}{u} = x + y\ ,$$

et le chemin $c + e^x\,d$ a pour extrémité $e^x\,e^y$, donc on a (1).

*Reçu le 13 mars 1957.*