Premier exposé

Je voudrais montrer ici comment on peut donner, au niveau de la première ou de la seconde année d'université, des exposés complets des propriétés de l'exponentielle complexe, par des méthodes très voisines de celles utilisées pour l'exponentielle réelle. Je donnerai l'esquisse de trois exposés indépendants: le premier n'utilise que le calcul différentiel, y compris les propriétés de dérivabilité des fonctions convexes; pour l'exponentielle réelle, il est souvent utilisé dans l'enseignement français depuis quelques années; le second utilise les propriétés les plus simples de l'intégrale, y compris la notion de convergence sur un intervalle infini; le troisième utilise l'intégrale curviligne. Ces exposés pourraient être modifiés de bien des façons que le lecteur apercevra aussitôt; ils n'ont d'ailleurs d'autre prétention que d'attirer l'attention sur une question pédagogique intéressante.

D'une façon générale, appelons *fonction exponentielle* une fonction f définie pour tout nombre réel, à valeurs réelles ou complexes, continue et non constante, vérifiant l'identité

$$f(x + y) = f(x) \cdot f(y) \qquad (1)$$

Disons qu'une fonction exponentielle est *réelle* si ses valeurs sont réelles, et *unitaire* (qu'on nous pardonne cette définition !) si ses valeurs sont des nombres complexes de module 1. Il suffit d'étudier ces deux cas, car toute autre fonction exponentielle est manifestement le produit d'une fonction exponentielle réelle et d'une fonction exponentielle unitaire.

On notera C l'ensemble des nombres complexes, R celui des nombres réels, Z celui des entiers, D celui des fractions réelles dont le dénominateur est une puissance de 2, kZ et kD l'ensemble des produits par k des éléments de Z ou de D. On sait que D est partout dense sur R.

Premier exposé

Théorème 1. — Il existe une et une seule fonction exponentielle réelle f telle que $f(1)$ soit égal à un nombre positif donné $a \neq 1$.

La démonstration de l'unicité de f est facile: une fonction continue sur R est déterminée par ses valeurs sur D; mais comme

l'identité, déduite de (1), $(f(x))^2 = f(2x)$, entraîne, d'une part, que les valeurs de f sont positives, d'autre part que $f(x)$ est nécessairement la racine carrée positive de $f(2x)$, la fonction f est connue sur D dès qu'elle l'est sur Z; à cet égard, si n est un entier positif, on a nécessairement $f(n) = a^n$ et $f(-n) = 1/f(n)$; d'où le résultat.

La démonstration de l'existence de f se fait à l'envers; on commence par vérifier que la fonction f définie comme précédemment sur Z possède la propriété (1) et la propriété

$$f(x) \geqslant 1 \quad \text{pour} \quad x \geqslant 0 \tag{2}$$

si l'on a supposé, comme on peut le faire, $a > 1$.

Si l'on définit, pour $x \in \frac{1}{2}\mathrm{Z}$, $f(x)$ comme la racine carrée positive de $f(2x)$, ceci est cohérent avec la définition de f sur Z d'après la propriété (1), et on voit aussitôt que, sur $\frac{1}{2}\mathrm{Z}$, f vérifie encore les propriétés (1) et (2); de même pour $\frac{1}{4}\mathrm{Z}$, $\frac{1}{8}\mathrm{Z}$, ..., c'est-à-dire enfin pour D.

Les relations (1) et (2) prouvent que f est *croissante* sur D; pour prouver qu'elle est continue, il suffit, d'après (1) de prouver que $f(x)$ tend vers 1 lorsque x, positif, tend vers 0; or, f étant croissante, $f(x)$ a une limite b lorsque x, positif, tend vers 0; et cette limite, étant aussi celle de $f(2x) = (f(x))^2$, vérifie $b = b^2$, donc $b = 1$.

Ainsi f, étant croissante et continue sur D, se prolonge en une fonction sur R qui a les mêmes propriétés — y compris (1) — d'après les résultats élémentaires sur les limites. Cette fonction est notée $x \to a^x$.

La formule

$$(a^x)^y = a^{xy} \tag{3}$$

résulte de l'unicité, car chaque membre est une fonction exponentielle réelle de y, égale à a^x pour $y = 1$.

Dérivée de l'exponentielle réelle

L'inégalité de la moyenne arithmétique et de la moyenne géométrique, jointe à (1), montre que l'on a

$$a^{\frac{x+y}{2}} \leqslant \frac{1}{2}(a^x + a^y)$$

d'où l'on déduit, comme l'on sait, que a^x est *convexe*, donc dérivable à droite et à gauche en tout point; en fait, les formules

$$\frac{1}{h}(a^{x+h} - a^x) = a^x\left(\frac{1}{h}(a^h - 1)\right), \quad \frac{1}{-h}(a^{-h} - 1) = a^{-h}\left(\frac{1}{h}(a^h - 1)\right)$$

prouvent que $\frac{1}{h}(a^h - 1)$ a une limite $q(a)$ lorsque h tend vers 0, et que a^x a pour *dérivée* $a^x\, q(a)$.

Or il est aisé de voir que a^x prend toute valeur positive (si a^x avait une limite pour $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$, cette limite b vérifierait encore $b^2 = b$) donc, quel que soit $d > 0$, il existe k réel tel que $d = a^k$, et par suite, d'après (3), $d^x = a^{kx}$; la dérivée à l'origine de cette fonction de x est $k\, q(a)$, donc il existe un choix et un seul de d tel que la fonction d^x ait pour dérivée 1 à l'origine; on désigne ce nombre d par e; on a $e^{q(a)} = a$, donc $q(a) = \log a$ si l'on désigne ainsi la fonction réciproque de $x \to e^x$. On a donc établi:

Théorème 2. — Il existe un nombre e et un seul tel que la fonction e^x soit sa propre dérivée; si log en est la fonction réciproque, la dérivée de a^x est $a^x \log a$.

Remarque. — La dérivée à l'origine de 2^x est inférieure à $\frac{2^1 - 1}{1} = 1$, celle de 4^x est supérieure à $\frac{4^{-\frac{1}{2}} - 1}{-\frac{1}{2}} = 1$, donc on a $2 < e < 4$.

Cette méthode de définition de l'exponentielle réelle étant rappelée, passons à l'exponentielle unitaire. Nous utiliserons le fait que tout nombre complexe $X + iY$ non nul a deux racines carrées $x + iy$ opposées, ce qui résulte facilement de la considération du système $x^2 - y^2 = X$, $2xy = Y$ en nombres réels. Remarquons que d'après l'identité (1) les périodes d'une fonction exponentielle f ne sont autres que les nombres x tels que $f(x) = 1$.

Théorème 3. — S'il existe une fonction exponentielle unitaire $e(x)$, ses périodes sont les multiples entiers d'un certain nombre positif $2p$, dont la donnée détermine la fonction à

la conjugaison près; réciproquement, si p est un nombre > 0 quelconque, il existe une fonction exponentielle unitaire $e_p(x)$ dont les périodes sont exactement les multiples entiers de $2p$.

Désignons par $c(x)$ et $s(x)$ la partie réelle et la partie imaginaire d'une fonction exponentielle unitaire $e(x)$ (il serait vain de dissimuler que $c(x)$ et $s(x)$ sont le cosinus et le sinus de l'angle de mesure x, lorsque la mesure de l'angle plat est p; mais, pour l'instant, l'existence et l'unicité de ces fonctions sont encore en question) et *démontrons d'abord l'unicité.*

En remplaçant dans (1) x et y par $\frac{1}{2}(x+y)$ et $\pm\frac{1}{2}(x-y)$, on trouve l'identité

$$c(x) - c(y) = 2\,s\left(\frac{x+y}{2}\right) s\left(\frac{y-x}{2}\right) \qquad (4)$$

Montrons d'abord l'existence de périodes. — Si $e(x)$ ne prenait pas la valeur 1 pour $x \neq 0$, il ne prendrait pas non plus la valeur -1, car $e(2x) = (e(x))^2$, donc $s(x)$ serait non nul pour $x \neq 0$, donc de signe constant pour $x > 0$, donc, d'après (4), $c(x)$ serait monotone sur l'intervalle $(0, +\infty)$, donc aurait une limite pour $x \to +\infty$; donc $e(x)$ aurait une limite b pour $x \to +\infty$, laquelle limite serait aussi celle de $e(2x) = (e(x))^2$, donc $b = b^2$ et, par suite, $b = 1$; donc $c(x)$ serait constamment égal à 1, et aussi $e(x)$, contrairement à l'hypothèse.

Les périodes de $e(x)$ constituent un sous-groupe (additif) *fermé* de R, qui est de la forme $2p\mathrm{Z}$, avec $p > 0$.

Comme $e(p) = -1$, $e(x)$ ne peut être réel pour $0 < x < p$, sinon il y aurait une période positive plus petite que $2p$; donc $s(x)$ a un signe constant pour $0 < x < p$, et *on peut supposer* que c'est le signe $+$, quitte à remplacer la fonction par sa conjuguée (qui est aussi son inverse); cette convention entraîne que $e(p) = i$, d'où $e\left(x + \frac{p}{2}\right) = i\,e(x)$ et par suite $s\left(x + \frac{p}{2}\right) = c(x)$. On voit alors que les signes et la variation des fonctions c et s sont donnés par le tableau suivant:

$x \bmod 2p$	0		$p/2$	p	$3p/2$		$2p$
$c(x)$		$+$	0	—	0	$+$	
	1		décroît	— 1	croît		1
$s(x)$	0		$+$	0	—		0
	0	croît	1	décroît	— 1	croît	0

(5)

Le signe de $s(x)$ se déduit de la convention, de (1) et de $e(p) = -1$; le sens de variation de $c(x)$, de la formule (4); son signe, de la connaissance de sa variation et de ses zéros; enfin, le sens de variation de $s(x)$ résulte de $s\left(x + \frac{p}{2}\right) = c(x)$.

Il est alors clair que la fonction $e(x)$ est déterminée par la valeur de p et la convention faite. En effet, il suffit de montrer qu'elle est déterminée sur $p\mathrm{D}$; mais $e(x)$ est nécessairement celle des deux racines carrées de $e(2x)$ dont la partie imaginaire a un signe conforme au tableau (5), de sorte que $e(x)$ est déterminée sur $p\mathrm{D}$, puisqu'elle l'est sur $p\mathrm{Z}$.

Démontrons maintenant l'existence de la fonction $e(x)$, p étant fixé.

En posant $e(2p) = 1$, $e(p) = -1$, $e\left(\frac{p}{2}\right) = i$, $e\left(3\frac{p}{2}\right) = -i$, il est clair que l'identité (1) est vérifiée sur $\frac{p}{2}\mathrm{Z}$, et que le signe de $s(x)$ est conforme au tableau (5).

Définissons alors $e(x)$ sur $\frac{p}{4}\mathrm{Z}$ en stipulant que $e(x)$ est celle des deux racines carrées de $e(2x)$ dont la partie imaginaire $s(x)$ a un signe conforme au tableau (5); de même sur $\frac{p}{8}\mathrm{Z}$, etc. Il suffit de démontrer que lors du passage de $p\mathrm{Z}/2^{n-1}$ à $p\mathrm{Z}/2^n$ l'identité (1) est conservée, car la cohérence des définitions en résulte. Or on déduit de la définition de $e(x)$ l'identité

$$s(2x) = 2s(x)\,c(x) \qquad (6)$$

qui prouve que, si les signes du tableau (5) sont respectés, sur $p\mathrm{Z}/2^n$, pour $s(x)$, ils le sont aussi pour $c(x)$, de sorte que $e\left(x + \frac{p}{2}\right)$ et $i\,e(x)$ sont égaux et non pas opposés. Posons alors

$$x = k\frac{p}{2} + x' \quad y = h\frac{p}{2} + y' \quad h, k \in \mathrm{Z} \quad 0 \leqslant x' < \frac{p}{2} \quad 0 \leqslant y' < \frac{p}{2}\,.$$

L'identité (1) vaut donc pour x et y à la condition nécessaire et suffisante qu'elle soit valable pour x' et y'; il suffit donc de vérifier que $s\,(x' + y')$ et $s\,(x')\,c\,(y') + c\,(x')\,s\,(y')$ sont égaux, et non pas opposés; mais ceci est clair, car les deux termes sont positifs.

Ainsi $e\,(x)$ peut être définie sur $p\mathrm{D}$ en respectant les signes du tableau (5); et par suite aussi les sens de variation d'après (4). De la décroissance de $c\,(x)$ sur l'intervalle $(0, p)$ résulte l'existence d'une limite, lorsque x tend vers 0, pour $c\,(x)$, donc aussi pour $e\,(x)$; mais cette limite b vérifie encore $b^2 = b$, donc est égale à 1; donc, d'après (1), $e\,(x)$ est *continue* sur $p\mathrm{D}$; on peut donc, en préservant la continuité, prolonger à R la définition de $c\,(x)$, qui est monotone par intervalles, donc aussi de $e\,(x)$.

Il conviendrait assurément de noter e_p, c_p, s_p les fonctions ainsi obtenues; mais continuons à sous-entendre l'indice p pour l'instant.

Dérivée de l'exponentielle unitaire

D'après (1), la dérivabilité de $e\,(x)$ équivaut à l'existence de la limite, pour h tendant vers 0, de

$$\frac{1}{h}\,(e\,(h) - 1) = \frac{1}{h}\,(c\,(h) - 1) + i\,\frac{s\,(h)}{h}\,.$$

Il est donc nécessaire que $s\,(h)/h$ ait une limite quand h tend vers 0; c'est aussi suffisant, car

$$\frac{1}{h}\,(c\,(h) - 1) = -\frac{2}{h}\left(s\left(\frac{h}{2}\right)\right)^2 = -\,s\left(\frac{h}{2}\right)\left(s\left(\frac{h}{2}\right)\Big/\frac{h}{2}\right)$$

tend vers 0 si $s\,(h)/h$ a une limite.

Or l'existence de cette limite résulte du fait que sur l'intervalle $(0, p)$ la fonction s est concave, puisque l'identité déduite de (1)

$$s\,(x + y) - \frac{1}{2}\,(s\,(2\,x) + s\,(2\,y)) = (s\,(x) - s\,(y))\,(c\,(y) - c\,(x))$$

montre que le premier membre est positif sur l'intervalle $\left(0, \frac{p}{2}\right)$,

les fonctions s et c y variant en sens contraire; l'éventualité d'une limite infinie n'est pas à retenir, car elle entraînerait que la fonction s ait pour dérivée $+\infty$ sur l'intervalle $\left(0, \frac{p}{2}\right)$, ce qui contredit le fait que pour k assez grand $s(x) - kx$ ne peut croître constamment sur cet intervalle.

Remarque. — Si r est la limite de $s(h)/h$, il en résulte que la fonction $t = s/c$ a pour dérivée r/c^2, qui est une fonction croissante sur l'intervalle $\left(0, \frac{p}{2}\right)$; donc t est convexe sur cet intervalle, avec la même dérivée à l'origine, r, que s; comme $e\left(\frac{p}{4}\right) = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$, on a $s\left(\frac{p}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $t\left(\frac{p}{4}\right) = 1$, donc r vaut au moins $\frac{4}{p} s\left(\frac{p}{4}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{2}$ et au plus $\frac{4}{p} t\left(\frac{p}{4}\right) = \frac{4}{p}$.

Définition du nombre π. — C'est le nombre p tel que la dérivée à l'origine de $e_p(x)$ soit i (c'est-à-dire $r = 1$); on a donc $2\sqrt{2} < \pi < 4$. On pose, bien sûr, $e_\pi(x) = e^{ix}$, $c_\pi(x) = \cos x$, $s_\pi(x) = \sin x$, $t_\pi(x) = tg\, x$. On a donc établi:

Théorème 4. — Il existe un nombre π, et une fonction exponentielle unitaire e^{ix} dont les périodes sont les multiples entiers de 2π, dérivable et de dérivée $i\,e^{ix}$. Toute fonction exponentielle unitaire est de la forme $x \to e^{ikx}$, avec k réel.

Deuxième exposé

En intégrant l'identité (1) par rapport à y, on voit que toute fonction exponentielle f vérifie

$$f(x) \int_a^b f(y)\, dy = \int_a^b f(x+y)\, dy = \int_{a+x}^{b+x} f(u)\, du$$

donc est dérivable et proportionnelle à sa dérivée, d'où le lemme:

Lemme. — Toute fonction exponentielle vérifie une équation différentielle de la forme

$$y' = ry \qquad (7)$$

où r est une constante, réelle pour une fonction réelle, et imaginaire pure pour une fonction unitaire.

Ce dernier point résulte de ce que $y\bar{y} = 1$ entraîne