1. Introduction.

SUR LES FORMULES D'INTÉGRATION DE L'ANALYSE VECTORIELLE

PAR

Michel A. KERVAIRE, Boston

---

1. INTRODUCTION [1].

Le but du présent article est de préciser les démonstrations (et l'énoncé) des formules d'intégration de l'analyse vectorielle. Il s'agit essentiellement des formules

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \tag{1.1}$$

et

$$\int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \tag{1.2}$$

dites théorèmes d'Ostrogradski (ou de Gauss) et de Stokes respectivement (**F**, champ vectoriel dans l'espace tri-dimensionnel).

Dans les manuels d'analyse vectorielle (cf. G. Juvet, par exemple), on regarde souvent (1.1), ainsi que les formules

$$\int_V \nabla f dV = \oint_S f d\mathbf{S} \quad \text{(Théorème du gradient)}, \tag{1.1'}$$

$$\int_V \nabla \times \mathbf{F} dV = \oint_S d\mathbf{S} \times \mathbf{F} \quad \text{(Théorème du rotationnel)}, \tag{1.1''}$$

---

[1] Cette introduction a été rédigée en collaboration avec A. Mercier. Pendant la rédaction de l'article l'auteur avait un contrat avec la National Science Foundation.

comme presque triviales, parce qu'elles s'obtiennent assez rapidement à partir d'une définition de l'opérateur ∇ qui serait

$$\nabla \ldots = \lim_{V=0} \frac{\oint d\mathbf{S} \ldots}{V} \cdot$$

La formule (1.2), ainsi que

$$\int_S (d\mathbf{S} \times \nabla) \times \mathbf{F} = \oint_C d\mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad \text{(Théorème anonyme dû à G. Juvet [2])}, \qquad (1.2')$$

sont alors démontrées avec plus ou moins de rigueur en regardant S comme la figure limite d'un volume d'épaisseur tendant vers zéro, dont la surface latérale finit par s'identifier à une ligne.

Outre que la légitimation de ces démonstrations nécessite (même dans le cas des formules « triviales ») un recours assez fastidieux au « formalisme des epsilons », il n'est guère satisfaisant de voir énoncer et démontrer des théorèmes où interviennent les notions de volume, bord d'un volume, bord d'une surface, sans que ces notions aient été définies. Cette lacune devient la source d'anomalies dès que l'on considère des surfaces pour lesquelles la notion intuitive de bord est douteuse. C'est ce qui se produit si l'on cherche à appliquer, par exemple, la formule de Stokes au ruban de Möbius [3]. Dans cet exemple (voir fig. 1), si C désigne la courbe qui « borde » le ruban et S le ruban lui-même, il est *inexact* que

$$\oint_C \mathbf{F} \,.\, d\mathbf{r} \qquad \text{et} \qquad \int_S \nabla \times \mathbf{F} \,.\, d\mathbf{S}$$

soient égales (en fait, il y a déjà ambiguité sur le signe des intégrales en question).

---

[2] Cf. A. MERCIER, Expression des équations de l'électromagnétisme au moyen des nombres de Clifford. *Archives des S. phys. et nat.*, Genève, *17*, p. 305, 1935.

[3] On pourra objecter que dans la démonstration du théorème de Stokes (telle qu'elle est donnée par G. Juvet, par exemple) on suppose qu'il est possible d'étendre par continuité et de manière cohérente l'orientation de la normale à la surface, ce qui n'est pas le cas pour le ruban de Möbius. Il est facile de construire une surface *orientable* de « bord intuitif » C, disons, dont le bord algébrique (correct) est 2C (par exemple) et pour laquelle la formule de Stokes intuitive est donc en défaut. (Prendre la région de la surface de Riemann de $w = z^{1/2}$ limitée par $\frac{1}{2} \leqq |z| \leqq 1$ et coller le long de $|z| = \frac{1}{2}$, 1 les bords des deux déterminations.)

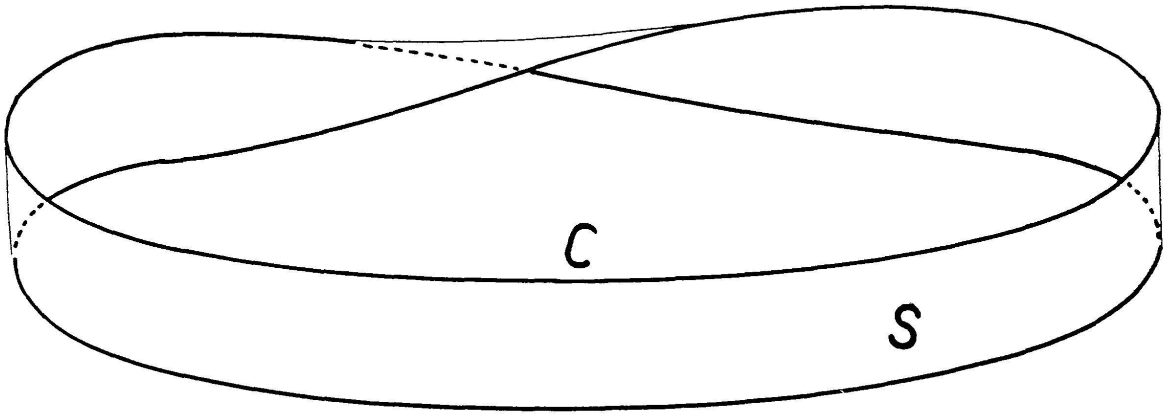

Fig. 1.

Dans ce qui suit nous démontrerons deux des formules rappelées, l'une de type trivial (1.1), l'autre de type non trivial (1.2), à l'aide d'une méthode qui évite les difficultés mentionnées. On verra par là aussi qu'il n'y a pas de différence réelle entre formules triviales et non triviales. Pour développer la méthode, nous devrons emprunter des notions aux théories algébriques plus avancées de l'intégration, en particulier celles de courbes, surfaces et volumes et de leurs bords en tant que cas particuliers de notions appartenant à la topologie algébrique. Toutefois nous nous restreindrons à un exposé assez élémentaire pour être accessible à l'étudiant d'un cours moyen sur le calcul vectoriel.

Nous nous limitons aux démonstrations de (1.1) et (1.2) car (1.1′) et (1.1″) découlent immédiatement de (1.1): Pour tout vecteur constant **a**, on a

$$\mathbf{a} \, . \int_{V} \nabla f dV = \int_{V} \nabla \, . \, (f\mathbf{a}) \, dV = \oint_{S} f\mathbf{a} \, . \, d\mathbf{S} = \mathbf{a} \, . \oint_{S} f d\mathbf{S}, \text{ d'où } (1.1')$$

(remarque similaire pour (1.1″)). De manière analogue, (1.2′) découle de (1.2):

$$\mathbf{a} \, . \oint_{C} d\mathbf{r} \times \mathbf{F} = \oint_{C} d\mathbf{r} \, . \, \mathbf{F} \times \mathbf{a} = \int_{S} d\mathbf{S} \, . \, \nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{a}), \text{ d'après } (1.2),$$

$$= \int_{S} d\mathbf{S} \times \nabla \, . \, \mathbf{F} \times \mathbf{a} = \int_{S} (d\mathbf{S} \times \nabla) \times \mathbf{F} \, . \, \mathbf{a}$$

où **a** désigne un vecteur constant quelconque.

L'auteur tient à souligner qu'il ne prétend à aucune originalité dans le présent article. L'idée des démonstrations présentées est bien connue en théorie des variétés différentiables; on la trouve également mentionnée brièvement dans la « Vorlesung von Prof. Dr. W. Pauli: Elektrodynamik », *VMP*, 1949, page 5. L'intention de cette publication est de montrer que l'adaptation de ces démonstrations au niveau élémentaire ne fait pas de difficulté et qu'il serait par suite souhaitable de les voir s'introduire dans les cours d'analyse vectorielle.

2. Préliminaires.

Nous utiliserons les formules du calcul vectoriel sans référence explicite. Citons cependant

$$\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \,.\, \mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2 = \textit{dét}\,(\mathbf{a}_i \,.\, \mathbf{b}_j) \ , \tag{2.1}$$

où $\times$ désigne le produit vectoriel et $.$ le produit scalaire.

De l'analyse vectorielle, on utilisera la forme que prend la formule de dérivation des fonctions composées: Si f est une fonction de x_1, x_2, x_3 et que ces variables soient elles-mêmes des fonctions de u et v (par exemple), les dérivées partielles (si elles existent) de la fonction $f(u, v)$ qui prend en (u, v) la valeur de la fonction f au point $x_1(u, v)$, $x_2(u, v)$, $x_3(u, v)$ sont données par

$$f_u = \nabla f \,.\, \mathbf{r}_u \ , \qquad f_v = \nabla f \,.\, \mathbf{r}_v \ , \tag{2.2}$$

où $\mathbf{r} = \{x_1, x_2, x_3\}$, les lettres u et v en indice indiquant la dérivation partielle. On aura, en outre, besoin de la formule

$$\nabla \times f\mathbf{a} = \nabla f \times \mathbf{a} \qquad (\mathbf{a}, \text{ vecteur constant}). \tag{2.3}$$

3. Courbes, surfaces, volumes (définitions).

Dans la suite, un *morceau de courbe* sera une fonction $\mathbf{r}(t)$ définie pour $0 \leqq t \leqq 1$ qui fait correspondre à *toute* valeur de t dans cet intervalle un vecteur de l'espace noté $\mathbf{r}(t)$. On exige, en outre, que $\mathbf{r}(t)$ possède au moins une dérivée première continue. Si l'on appelle *application* une fonction définie continue pour