2.3. Application des résultats de 1. aux structures feuilletées du plan.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **3 (1957)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

au feuilletage (cf. définition 2 de 2.1) est une variété à une dimension à base dénombrable et simplement connexe. Si (F) *est une structure feuilletée différentiable de classe* C^r *(ou analytique), l'espace des feuilles* V *est muni canoniquement d'une structure de variété à une dimension différentielle de classe* C^r *(ou analytique).*

Comme R^2 est connexe et à base dénombrable, V est également connexe et à base dénombrable. Pour montrer que V est une variété à une dimension, il suffit de vérifier que tout point z de V admet un voisinage ouvert homéomorphe à la droite numétique. Soit π la projection canonique de R^2 sur V; la feuille $\pi^{-1}(z)$ rencontre au moins un ouvert distingué 0_i. La relation d'équivalence induite par ρ dans 0^i est, d'après le théorème 1, la relation ρ_i. Donc $\pi(0_i)$ qui est un voisinage ouvert de z, puisque ρ est une relation d'équivalence ouverte, est homéomorphe à $0^i/\rho_i$, c'est-à-dire à la droite numérique.

En vertu du théorème de Jordan, le complémentaire de toute feuille (qui est un sous-ensemble fermé de R^2) a deux composantes connexes; le complémentaire de tout point de V a donc également deux composantes connexes. Cette propriété est équivalente au fait que V est simplement connexe (cf. 1.2, lemme).

Soit A un atlas définissant sur R^2 la structure feuilletée différentiable considérée et soit $\overline{h}_i$ la restriction de la carte $h_i \in A$ à la droite $x = 0$. L'ensemble des cartes $\pi\overline{h}_i$ de R dans V est un atlas qui définit sur V une structure différentiable.

Le lecteur pourra construire à titre d'exercice l'espace des feuilles des structures feuilletées du plan définies dans les exemples ci-dessus.

2.3. *Application des résultats de 1. aux structures feuilletées du plan.*

Démonstration du théorème 2.

Le théorème 2 de 2.1 (Kaplan) est une conséquence immédiate de la proposition 1 de 2.2 et de la proposition 1 de 1.2. Soit f une application qui étale l'espace quotient R^2/ρ dans R; l'application $\varphi = f\pi$ est une fonction numérique sur R^2 qui satisfait aux conditions du théorème 2.

Démonstration du théorème 3.

Si le théorème est vrai pour les ouverts bornés et simplement connexes de R^2, il le sera également pour tout ouvert Ω borné; il suffit de considérer l'ouvert C limité par un cercle qui contient Ω; si φ est une fonction dans C qui satisfait aux conditions du théorème, il en sera évidemment de même de sa restriction à Ω.

Ainsi le théorème de Kamke est une conséquence de la proposition 1 de 1.3 et de la proposition suivante:

PROPOSITION: L'espace des feuilles $V' = \Omega/\rho'$ de la structure feuilletée (F') induite par (F) sur Ω est munie d'une structure de variété différentiable régulière de classe C^r.

Soient π et π' respectivement les projections canoniques de R^2 sur $R^2/\rho = V$ et $\Omega/\rho' = V'$. L'injection canonique $\Omega \to R^2$ définit par passage aux quotients une application continue ψ de V' dans V. Comme tout ouvert distingué de Ω est un ouvert distingué de R^2, l'application ψ étale V' dans V; elle est r-différentiable et partout de rang 1.

Soit x' un point de V' et soit x le point $\psi(x')$. Comme Ω est relativement compact, l'intersection de la feuille $F = \pi^{-1}(x)$ avec l'adhérence $\overline{\Omega}$ de Ω est compacte. On peut alors trouver un ouvert distingué W dans R^2 suffisamment étroit et allongé pour contenir $F \cap \overline{\Omega}$ et tel que $W \cap \Omega$ soit saturé par des feuilles de Ω. Il est appliqué par π sur un ouvert U homéomorphe à un intervalle et contenant x. Soit f' une fonction r-différentiable définie sur un voisinage U' homéomorphe à un intervalle de x' dans V' suffisamment petit pour que $\psi(U') \subset U$. L'application f obtenue en composant l'inverse de la restriction de ψ à U' avec l'application f' est une fonction r-différentiable définie sur un voisinage de x. Comme U est homéomorphe à un intervalle, il est possible de construire une fonction r-différentiable g sur U qui coïncide avec f sur un voisinage de x et qui s'annule en dehors d'un compact K contenu dans U. Comme $\pi^{-1}(K) \cap W \cap \Omega$ est un fermé dans Ω et qu'il est saturé par des feuilles de Ω, la fonction égale à $g\pi$ sur $W \cap \Omega$ et à zéro aux autres points de Ω est r-différentiable et définit par passage aux quotients une fonction r-différentiable g' sur V' qui coïncide avec f' au voisinage de x'.

Démonstration du théorème 4.

Il est en général nécessaire de supposer que Ω est borné pour que le théorème de Kamke soit vrai, comme le montre l'exemple suivant.

Soient 0_1 et 0_2 deux exemplaires du plan R^2; dans l'espace somme $0_1 + 0_2$ considérons la relation d'équivalence qui identifie les points (x_1, y_1) et (x_2, y_2) tels que $x_2 = x_1 + 1/y_1$, $y_2 = y_1^3$ pour tout $y_1 < 0$ et qui se réduit à l'identité pour les points tels que $y_1 \geqslant 0$ ou $y_2 \geqslant 0$. L'espace quotient E est homéomorphe au plan R^2; les deux cartes 0_1 et 0_2 forment un atlas qui définit sur E une structure feuilletée analytique dont l'espace des feuilles est le branchement simple muni de la deuxième structure différentiable définie dans 1.3, propriété 1.

Cet exemple permet de bien comprendre la construction de l'exemple de Wazewsky. En particulier, il est facile d'imaginer une structure feuilletée de classe C^∞ dont l'espace des feuilles soit une plume composée V (cf. 1.1, ex. 5) munie d'une structure différentiable de classe C^∞ telle que toute fonction différentiable sur V se réduise à une constante.

Classification des structures feuilletées du plan.

Le problème de la classification des structures feuilletées du plan a été résolu complètement par Kaplan [3]. Nous allons indiquer brièvement et sans démonstration comment nos méthodes permettent également de résoudre ce problème.

La seule considération de l'espace quotient V associé au feuilletage ne suffit pas à le caractériser. Pour cela, il faut introduire une relation d'ordre parmi les points de branchement. Soit V une variété à une dimension simplement connexe et orientée, et soit A un atlas de R sur V définissant une orientation de V. Soient x_1 et x_2 deux points de V qui ne sont pas séparés. Nous dirons que x_1 et x_2 ne sont pas séparés à droite (respectivement à gauche) et nous écrirons $x_1 \sim x_2$ mod. λ^+ (respectivement λ^-) si, étant données deux cartes h_1 et h_2 de A telles