# 2.1. Rappel de définitions et de propriétés classiques.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **3 (1957)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **18.09.2024**

l'intervalle $[-1, +1]$ défini par $t_0' = \lim_{t \to t_0} h_k^{-1} h_{n+1}(t)$ et soit $x' = \tilde{h}_k(t_0')$; le point $x = \tilde{h}_{n+1}(t_0)$ n'est pas séparé de $x'$. Il existe une fonction $r$-différentiable $g$ dans V qui coïncide avec $\hat{f}_k \tilde{h}_k^{-1}$ sur un voisinage de $x'$; comme $g$ est de rang 1 en $x'$, elle l'est également en $x$ (lemme 1). La fonction qui est égale à $gh_{n+1}$ sur l'intervalle $]-\infty, t_0]$ et à $f_n h_{n+1}$ sur $]t_0\ t_1[$ est $r$-différentiable sur $]-\infty, t_1[$ car les deux fonctions $g\tilde{h}_{n+1}$ et $f_n h_{n+1}$ coïncident dans un intervalle $]t_0, t_2'[$. En répétant la même construction pour $t_1$, on obtient une fonction définie sur R de rang 1 sur l'intervalle $[t_0, t_1]$ et dont la restriction à $]t_0, t_1[$ coïncide avec $f_n h_{n+1}$; d'après le lemme 2, il existe une fonction $r$-différentiable $\hat{f}_{n+1}$ qui prolonge $f_n h_{n+1}$ et qui est partout de rang 1. La fonction $f_{n+1}$ cherchée est égale à $f_n$ sur $\Omega_n$ et à $\hat{f}_{n+1} h_{n+1}^{-1}$ sur $0_n$.

Corollaire: Toutes les structures différentiables sur la droite numérique R sont équivalentes.

Soit R la droite numérique munie de sa structure différentiable ordinaire et R′ la droite numérique munie d'une structure différentiable de classe $C^r$. D'après la proposition, il existe une application $r$-différentiable partout de rang 1 de R′ sur R (en faisant au besoin une homothétie convenable). Comme cette application est biunivoque, c'est un isomorphisme de classe $C^r$ de R′ sur R (muni de sa structure différentiable ordinaire de classe $C^r$).

## 2. Les structures feuilletées du plan.

### 2.1. *Rappel de définitions et de propriétés classiques.*

Définition 1: *Une structure feuilletée* (F) *sur une variété à deux dimensions* $V_2$ *est définie par un atlas* A *de* $R^2$ *sur* $V_2$ *tel que si* $h_i$ *et* $h_j$ *sont deux cartes quelconques de* A, *le changement de cartes* $h_{ji} = h_j^{-1} h_i$ *est un homéomorphisme d'un ouvert* $U_{ji}$ *de* $R^2$ *sur un ouvert de* $R^2$ *qui, au voisinage de tout point de* $U_{ji}$ *s'exprime par des équations de la forme:*

$$x' = g_{ji}(x, y) \qquad y' = k_{ji}(y) \,. \tag{1}$$

*Si les changements de cartes* $h_{ji}$ *sont* r-*différentiables (respectivement analytiques), on dira que la structure feuilletée* (F) *est différentiable de classe* $C^r$ *(respectivement analytique)* [7].

Disons qu'une carte $f$ de $R^2$ dans $V_2$ est compatible avec A, si pour toute carte $h \in A$, le changement de carte $f^{-1}h$ est aussi de la forme (1) (et de plus est $r$-différentiable ou analytique dans le cas où (F) est une structure différentiable de classe $C^r$ ou analytique). L'ensemble de toutes les cartes compatibles avec A forme l'atlas maximal engendré par A et définissant sur $V_2$ la structure feuilletée (F). Nous supposerons dans ce qui suit que A est déjà un atlas maximal.

Soit U un ouvert de $V_2$. L'ensemble des cartes de A dont le but est dans U forme un atlas de $R_2$ sur U qui définit la structure feuilletée $(F_U)$ induite par (F) sur U.

Si (F) et (F′) sont des structures feuilletées sur $V_2$ et $V_2'$ respectivement, définies par les atlas maximaux A et A′, un isomorphisme de (F) sur (F′) est un homéomorphisme $\psi$ de $V_2$ sur $V_2'$ tel que $A' = \psi A$ (c'est-à-dire que toute carte de A′ est de la forme $\psi h$, où $h \in A$).

Dans le but $0_i$ de chaque carte $h_i \in A$ est définie une relation d'équivalence $\rho_i$ dont les classes sont les images par $h_i$ des droites $y =$ Cte. Des relations (1) il résulte que pour tout point $x \in 0_i \cap 0_j$, les relations d'équivalence induites par $\rho_i$ et $\rho_j$ dans un voisinage suffisamment petit de $x$ coïncident. Soit $\rho$ la relation d'équivalence engendrée par les $\rho_i$.

DÉFINITION 2: *Les classes de* $\rho$ *dans* $V_2$ *sont appelées les feuilles de la structure feuilletée* (F).

L'espace des feuilles, c'est-à-dire l'espace quotient de $V_2$ par la relation d'équivalence $\rho$ (muni de la topologie quotient de celle de $V_2$), jouera un rôle essentiel dans la suite.

On remarquera que la relation d'équivalence $\rho$ est ouverte puisqu'elle est engendrée par les relations $\rho_i$ qui sont ouvertes.

Rappelons qu'à tout champ de vecteurs E défini sur une variété $V_2$ séparée vérifiant les deux conditions suivantes: (i) E est différentiable de classe $C^r$ (ou analytique), (ii) E $(z) \neq 0$

---

[7] Pour une définition générale des variétés feuilletées, voir [6].

en tout point $z$ de $V_2$, est associée une structure feuilletée différentiable de classe $C^r$ (ou analytique). Les feuilles sont alors les trajectoires du champ de vecteurs E. Réciproquement à toute structure feuilletée différentiable (F) de la classe $C^r$ dans $R_2$, on peut faire correspondre un champ de vecteurs E sur $V_2$ dont les trajectoires sont les feuilles de (F).

*Exemple:* Les courbes qui sont solutions de l'équation différentielle (en coordonnées polaires $r$ et $\omega$): $dr/d\omega = r(1 - r^2)$ sont les feuilles d'une structure feuilletée analytique du plan privé de l'origine. Le cercle $r = 1$ est une feuille autour de laquelle les autres feuilles s'enroulent asymptotiquement.

L'espace quotient de $R^2 - 0$ par la relation d'équivalence $\rho$ associée à la structure feuilletée admet dans ce cas une partition en un sous-espace ouvert homéomorphe à deux cercles et un point admettant comme seul voisinage l'espace tout entier.

Définition 3: *Le couple* $(0_i, h_i)$ *formé d'une carte* $h_i \in A$ *et de son but* $0_i$ *s'appelle un ouvert distingué de la structure feuilletée* (F).

Enonçons les principaux résultats relatifs aux structures feuilletées du plan. Le théorème 1 qui suit est classique; sa démonstration repose sur le théorème de Jordan (dans une version particulièrement facile à établir); elle utilise donc essentiellement le fait que le plan $R^2$ est simplement connexe (ou plus précisément que son premier nombre de Betti modulo 2 est nul).

Théorème 1 (Poincaré [5], Bendixon [1]): Soit $(0_i, h_i)$ un ouvert distingué d'une structure feuilletée du plan; l'image par $h_i^{-1}$ de l'intersection de $0_i$ avec une feuille quelconque se réduit à l'ensemble vide ou à une droite $y = $ Cte.

Théorème 2 (Kaplan [3]): A toute structure feuilletée du plan $R^2$ on peut associer une fonction numérique $\psi$ définie dans $R^2$ qui vérifie les propriétés suivantes:

(i) $\psi$ est continue et n'admet pas de maximum ou de minimum (au sens large);

(ii) $\psi$ est constante sur les feuilles de la structure feuilletée.

THÉORÈME 3 (Kamke [2]): Soit (F) une structure feuilletée de classe $C^r$ du plan $R^2$. Soit $\Omega$ un ouvert borné du plan. Il existe une fonction numérique $\psi$ définie dans $\Omega$ et qui vérifie les propriétés suivantes:

(i) $\psi$ est $r$-différentiable et le gradient de $\psi$ est différent de 0 en tout point de $\Omega$;

(ii) $\psi$ est constante sur les feuilles de la structure feuilletée induite par (F) sur $\Omega$.

THÉORÈME 4 (Wazewsky [7]): On peut munir le plan $R^2$ d'une structure feuilletée de classe $C^\infty$ telle que toute fonction $r$-différentiable sur $R^2$ et qui est constante sur les feuilles de la structure feuilletée se réduise à une constante.

Nous ne reproduirons pas la démonstration du théorème 1, mais nous montrerons dans 2.2 et 2.3 que les théorèmes 2, 3 et 4 sont des conséquences du théorème 1 et des propriétés des variétés à une dimension établies dans la première partie.

*Exemples* de structures feuilletées du plan:

1. Les droites $y =$ Cte sont évidemment les feuilles d'une structure feuilletée du plan;
2. Soit C une courbe de Jordan dans le plan $R^2$. La structure feuilletée précédente induit sur l'ouvert limité par C et qui est homéomorphe à $R^2$ une structure feuilletée analytique;
3. Le complémentaire U dans $R^2$ de l'ensemble des points de coordonnées $x = 0$, $y \geqslant 0$ est homéomorphe à $R^2$. Les composantes connexes des lignes de niveau de la fonction $\psi = xy$ sont les feuilles d'une structure feuilletée analytique de U.

## 2.2. *L'espace des feuilles d'une structure feuilletée du plan.*

La proposition suivante est une conséquence essentielle du théorème 1 de 2.1.

PROPOSITION 1: *Soit* (F) *une structure feuilletée du plan* $R^2$. *L'espace quotient* V *de* $R^2$ *par la relation d'équivalence* $\rho$ *associée*