vérifie alors aisément que tout point Q du plan différent de P_1, qui est à une distance égale à 1 de P_j est à une distance supérieure à 1 d'au moins l'un des trois points P_1, P_i, P_k et par suite n'appartient pas à l'ensemble. En supprimant P_j dans l'ensemble considéré on n'y supprime qu'un seul segment de longueur 1, d'où la récurrence.

De cette démonstration, il résulte encore que dans un ensemble de n points, de diamètre égal à 1, il y a toujours au moins un point P_1 à une distance égale à 1 de deux autres points au plus, P_i et P_j. Le théorème de Borsuk qui est évident pour $n = 3$ s'en déduit encore par récurrence sur n. Car on peut décomposer l'ensemble des $n - 1$ points, obtenu par suppression de P_1 en trois sous-ensembles de diamètre inférieur à 1. L'un d'entre eux ne contient ni P_i ni P_j; en lui adjoignant P_1, il reste encore de diamètre inférieur à 1, et on obtient ainsi une décomposition de l'ensemble primitif.

37. Puisque les cercles de rayon 1 ont deux à deux des points communs, leurs centres forment un ensemble de diamètre au plus égal à 2. D'après **34** on peut le recouvrir par un hexagone de côté $2/\sqrt{3}$. Les milieux des côtés d'un triangle équilatéral inscrit dans cet hexagone forment un triangle équilatéral de côté égal à 1. Tout point de l'hexagone et, en particulier, tout centre d'un cercle de l'ensemble est à une distance au plus égale à 1 d'au moins l'un des sommets de ce triangle.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE

[1] Altwegg, M. Ein Satz über Mengen von Punkten mit ganzzahliger Entfernung. *Elemente der Math.*, *7*, 56-58, 1952.

[2] Anning, N. H. and P. Erdös. Integral distances. *Bull. Amer. Math. Soc.*, *51*, 598-600, 1945.

[3] Balasubramanian, N. A theorem on sets of points. *Proc. Nat. Inst. Sci. India*, *19*, 839, 1953.

[4] Bernheim, B. and Th. Motzkin. A criterium for divisibility of n-gons into k-gons. *Comment. Math. Helvetici*, *22*, 93-102, 1949.

[5] Borsuk, K. Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphäre. *Fundamenta Math.*, *20*, 177-190, 1933.

[6] de Bruijn, N. G. and P. Erdös. On a combinatorial problem. *Indagationes Math.*, *10*, 421-423, 1948.

[7] COXETER, H. S. M. A problem of collinear points. *Amer. Math. Monthly*, *55*, 26-28, 1948.

[8] DELACHET, A. *La géométrie contemporaine.* Paris 1950, 128 S.

[9] DIRAC, G. A. Collinearity properties of sets of points. *Quart. J. Math. Oxford*, Ser. (2), *2*, 221-227, 1951.

[10] EGGLESTON, H. G. Covering a three-dimensional set with sets of smaller diameter. *J. London Math. Soc.*, *30*, 11-24, 1955.

[11] ERDÖS, P. Problem No. 4065. *Amer. Math. Monthly*, *51*, 169-171, 1944.

[12] —— Integral distances. *Bull. Amer. Math. Soc.*, *51*, 996, 1945.

[13] —— On sets of distances of *n* points. *Amer. Math. Monthly*, *53*, 248-250, 1946.

[14] FEJES TÓTH, L. *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum.* Berlin, Göttingen, Heidelberg 1953, 198 S.

[15] GALE, D. On inscribing *n*-dimensional sets in a regular *n*-simplex. *Proc. Amer. Math. Soc.*, *4*, 222-225, 1953.

[16] GUPTA, H. Non-concyclic sets of points. *Proc. Nat. Inst. Sci. India*, *19*, 315-316, 1953.

[17] GUSTIN, W. On the interior of the convex hull of an euclidean set. *Bull. Amer. Math. Soc.*, *53*, 299-301, 1947.

[18] HADWIGER, H. Über die rationalen Hauptwinkel der Goniometrie. *Elemente der Math.*, *1*, 98-100, 1946.

[19] —— Eulers Charakteristik und kombinatorische Geometrie. *J. reine angew. Math.*, *194*, 101-110, 1955.

[20] HANNER, O. and H. RÅDSTRÖM. A generalization of a theorem of Fenchel. *Proc. Amer. Math. Soc.*, *2*, 589-593, 1951.

[21] HELLY, E. Über Mengen konvexer Körper mit gemeinschaftlichen Punkten. *Jber. Deutsch. Math. Verein.*, *32*, 175-176, 1923.

[22] HOPF, H. Über Zusammenhänge zwischen Topologie und Metrik im Rahmen der elementaren Geometrie. *Math. Phys. Semesterber.*, *3*, 16-29, 1953.

[23] —— und E. PANNWITZ. Aufgabe Nr. 167. *Jahresber. Deutsch. Math. Verein.*, *43*, 114 kursiv, 1934; *45*, 33 kursiv, 1936.

[24] HORN, A. Some generalizations of Helly's theorem on convex sets. *Bull. Amer. Math. Soc.*, *55*, 923-929, 1949.

[25] HORN, A. and F. A. VALENTINE. Some properties of L-sets in the plane. *Duke Math. J.*, *16*, 131-140, 1949.

[26] JUNG, H. W. E. Über die kleinste Kugel, die eine räumliche Figur einschliesst. *J. reine angew. Math.*, *123*, 241-257, 1901.

[27] KARLIN, S. and L. S. SHAPLEY. Some applications of a theorem on convex functions. *Ann. Math. Princeton*, Ser. (2), *52*, 148-153, 1950.

[28] KELLY, L. M. Covering problems. *Nat. Math. Mag.*, *19*, 123-130, 1944.

[29] KIRCHBERGER, P. Über Tschebyschefsche Annäherungsmethoden. *Math. Ann.*, *57*, 509-540, 1903.

[30] KLEE, V. L., jr. On certain intersection properties of convex sets. *Canadian J. Math.*, *3*, 272-275, 1951.

[31] —— Brief an H. Hadwiger vom 20. Februar 1953.

[32] —— The critical set of a convex body. *Amer. J. of Math.*, *75*, 178-188, 1953.

[33] KLEE, V. L., jr. Brief an P. Vincensini vom 27. September 1954.

[34] —— Common secants for plane convex sets. *Proc. Amer. Math. Soc.*, *5*, 639-641, 1954.

[35] KÖNIG, D. Über konvexe Körper. *Math. Z.*, *14*, 208-210, 1922.

[36] LEVI, F. W. On Helly's theorem and the axioms of convexity. *J. Indian. Math. Soc.*, *15*, 65-76, 1951.

[37] —— Eine Ergänzung zum Hellyschen Satze. *Archiv der Math.*, *4*, 222-224, 1953.

[38] MOSER, L. On the different distances determined by *n* points. *Amer. Math. Monthly*, *59*, 85-91, 1952.

[39] MOTZKIN, Th. The lines and planes connecting the points of a finite set. *Trans. Amer. Math. Soc.*, *70*, 451-464, 1951.

[40] MÜLLER, A. Auf einem Kreis liegende Punktmengen ganzzahliger Entfernungen. *Elemente der Math.*, *8*, 37-38, 1953.

[41] NAGY, B. Sz.-. Ein Satz über Parallelverschiebungen konvexer Körper. *Acta Scient. Math.*, *15*, 169-177, 1954.

[42] PÁL, J. Über ein elementares Variationsproblem. *Math.-fys. Medd., Danske Vid. Selsk.*, *3*, 1920, 35 S.

[43] PÓLYA, G. und G. SZEGÖ. *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis.* Berlin 1925, Bd. 1, 338 S.; Bd. 2, 408 S.

[44] RADEMACHER, H. and I. J. SCHOENBERG. Helly's theorems on convex domains and Tchebycheff's approximation problem. *Canadian J. Math.*, *2*, 245-256, 1950.

[45] —— und O. TOEPLITZ. *Von Zahlen und Figuren.* Berlin 1930, 164 S

[46] RADO, R. Theorems on the intersection of convex sets of points. *J. London Math. Soc.*, *27*, 320-328, 1952.

[47] —— A theorem on sequences of convex sets. *Quart. J. Oxford*, Ser. (2), *3*, 183-186, 1952.

[48] RADON, J. Mengen konvexer Körper, die einen gemeinsamen Punkt enthalten. *Math. Ann.*, *83*, 113-115, 1921.

[49] ROBINSON, C. V. Spherical theorems of Helly's type and congruence indices of spherical caps. *Amer. J. of Math.*, *64*, 260-272, 1942.

[50] SANTALÓ, L. A. Un teorema sobre conjuntos de paralelepipedos de aristas paralelas. *Publ. Inst. Mat. Univ. Nac. Litoral*, *2*, 49-60, 1940; *3*, 202-210, 1942.

[51] —— Sobre pares de figuras convexas. *Gaz. Mat. Lisboa*, *12*, 7-10, 1951; *14*, 6, 1953.

[52] SCHERRER, W. Die Einlagerung eines regulären Vielecks in ein Gitter. *Elemente der Math.*, *1*, 97-98, 1946.

[53] STEIGER, F. Zu einer Frage über Mengen von Punkten mit ganzzahliger Entfernung. *Elemente der Math.*, *8*, 66-67, 1953.

[54] STEINITZ, E. Bedingt konvergente Reihen und konvexe Systeme. *J. reine angew. Math.*, *143*, 128-175, 1913; *144*, 1-40, 1914; *146*, 1-52, 1916.

[55] SYLVESTER, J. J. Question No. 11851. *Educational Times*, *59*, 98, 1893,

[56] TREVISAN, G. Una condizione di allineamento per gli insiemi infiniti di punti del piano euclideo. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, *18*. 258-261, 1949.

[57] Trost, E. Bemerkung zu einem Satz über Mengen von Punkten mit ganzzahligen Entfernungen. *Elemente der Math.*, *6*, 59-60, 1951.

[58] Vincensini, P. Sur une extension d'un théorème de M. J. Radon sur les ensembles de corps convexes. *Bull. Soc. Math. France*, *67*, 115-119, 1939.

[59] —— Les ensembles d'arcs d'un même cercle dans leurs relations avec les ensembles de corps connexes du plan euclidien. *Atti IV. Congr. Un. Mat. Ital.*, *2*, 456-464, 1953.

[60] —— Sur certains ensembles d'arcs de cercle ou de calottes sphériques. *Bull. Sci. Math.*, (2), *77*, 120-128, 1953.

Reçu le 26 avril 1956.